

# **IMMAGINE VIRTUALE DI SPECCHI CONICI PER ANAMORFOSI**

## Calcolo analitico ed esperimenti

DANIELE MURRA, PAOLO DI LAZZARO

ENEA - Unità Tecnica Sviluppo di Applicazioni delle Radiazioni  
Laboratorio Sorgenti di Radiazioni  
Centro Ricerche Frascati, Roma



AGENZIA NAZIONALE PER LE NUOVE TECNOLOGIE,  
L'ENERGIA E LO SVILUPPO ECONOMICO SOSTENIBILE

# IMMAGINE VIRTUALE DI SPECCHI CONICI PER ANAMORFOSI

## Calcolo analitico ed esperimenti

DANIELE MURRA, PAOLO DI LAZZARO

ENEA - Unità Tecnica Sviluppo di Applicazioni delle Radiazioni  
Laboratorio Sorgenti di Radiazioni  
Centro Ricerche Frascati, Roma

I Rapporti tecnici sono scaricabili in formato pdf dal sito web ENEA alla pagina  
<http://www.enea.it/it/produzione-scientifica/rapporti-tecnici>

I contenuti tecnico-scientifici dei rapporti tecnici dell'ENEA rispecchiano l'opinione degli autori e non necessariamente quella dell'Agenzia.

The technical and scientific contents of these reports express the opinion of the authors but not necessarily the opinion of ENEA.

## IMMAGINE VIRTUALE DI SPECCHI CONICI PER ANAMORFOSI

Calcolo analitico ed esperimenti

DANIELE MURRA, PAOLO DI LAZZARO

### **Riassunto**

Presentiamo il calcolo analitico esatto, validato da risultati sperimentali, dell'immagine virtuale prodotta da specchi conici solidi utilizzati per visualizzare immagini giacenti sul piano della base del cono, come nel caso della ricostruzione e imaging di anamorfosi catottriche. I nostri risultati provano che l'immagine virtuale di specchi conici giace su una superficie 3-D non intuitiva, mostrando come la trattazione geometrica sinora usata sia inadeguata a trovare la corretta posizione dell'immagine virtuale. Un commento è dedicato ai processi di percezione visiva che portano a percepire l'immagine virtuale dell'anamorfosi conica su una superficie 2-D assai diversa da quella misurata in questo lavoro. La possibile estensione del nostro metodo analitico a specchi conici utilizzati come strumenti di imaging panoramico per visione artificiale viene commentata.

**Parole chiave:** Specchi conici; Immagine virtuale; Anamorfosi catottriche; Progetto di sistemi ottici; Ricostruzione di immagini; Percezione visiva

## ***VIRTUAL IMAGE OF CONICAL MIRRORS USED IN ANAMORPHOSES***

*Analytical calculation and experiments*

### ***Abstract***

*In this technical Report we consider the problem of the exact calculation of the virtual image produced by solid cone mirrors used for imaging patterns placed on the plane of the cone's base, as in the case of decrypting catoptric anamorphoses. Our analytical results, confirmed by experimental measurements, demonstrate that the virtual image of cone mirrors lies on a not intuitive, complex 3-D surface, thus showing how the widely accepted geometric approach used to date is inadequate to find the correct virtual image position. A comment is devoted to the psychological and physiological processes that lead to perceive the virtual image on a 2-D surface much different of that measured in this work. The possible extension of this analytical method to cone mirrors used as panoramic imaging tools for machine vision is briefly discussed.*

**Keywords:** *Cone mirrors; Virtual image; Catoptric anamorphosis; Optical system design; Image reconstruction; Visual perception.*



## INDICE

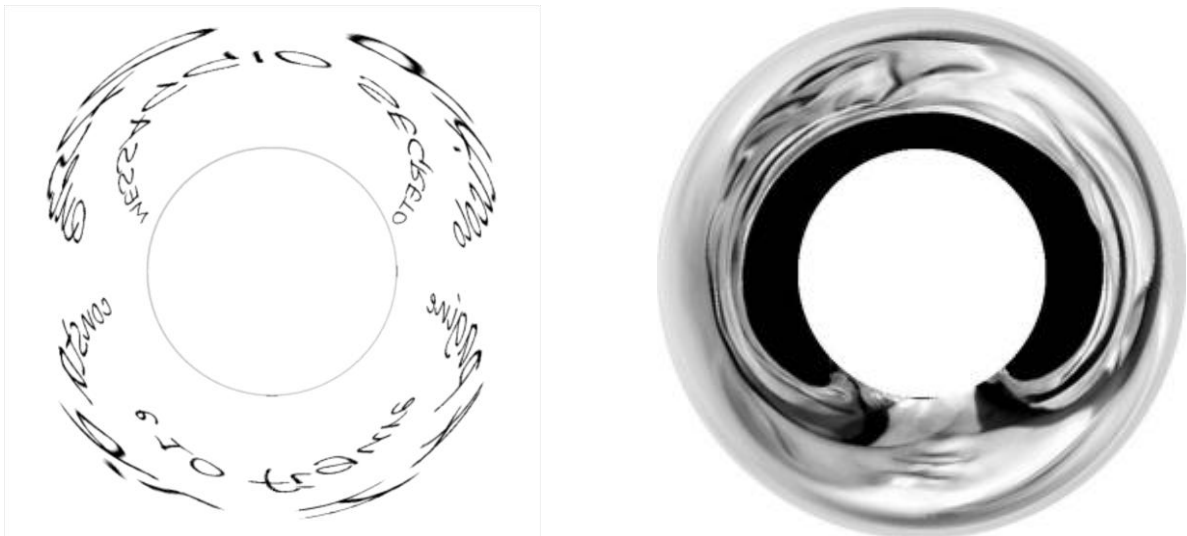
<b>Introduzione .....</b>	<b>7</b>
<b>Anamorfosi coniche, approccio geometrico .....</b>	<b>8</b>
<b>Anamorfosi coniche, trattazione analitica esatta .....</b>	<b>10</b>
<b>Misure sperimentali .....</b>	<b>12</b>
<b>Discussione dei risultati .....</b>	<b>13</b>
<b>Conclusioni .....</b>	<b>14</b>
<b>Appendice 1 .....</b>	<b>15</b>
<b>Appendice 2 .....</b>	<b>17</b>
<b>Appendice 3 .....</b>	<b>19</b>
<b>Referenze .....</b>	<b>21</b>



# IMMAGINE VIRTUALE DI SPECCHI CONICI PER ANAMORFOSI: CALCOLO ANALITICO ED ESPERIMENTI

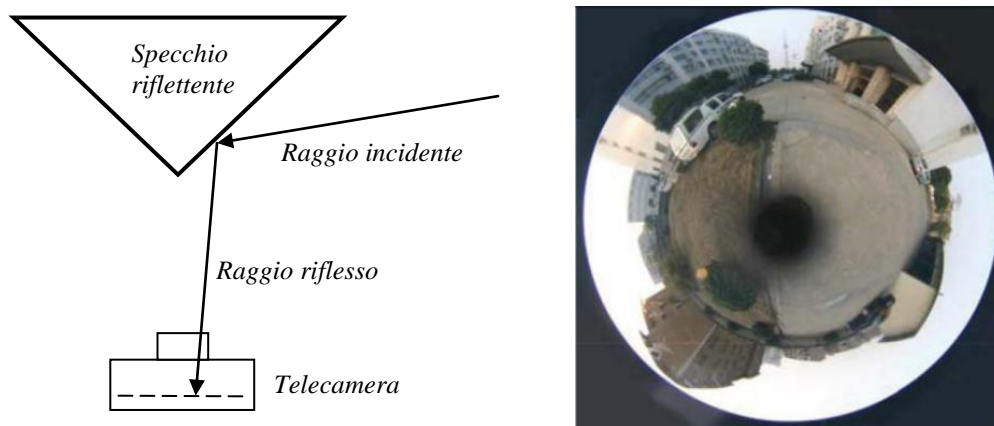
## 1. INTRODUZIONE

Le peculiari proprietà degli specchi conici sono conosciute sin dal XVII secolo, grazie agli studi prospettici delle anamorfosi catottriche [1]. L'anamorfosi è un disegno realizzato attraverso una procedura, detta di prospettiva inversa, tramite la quale un'immagine viene distorta in modo da apparire indecifrabile se vista frontalmente, ma si ricompone, si svela e diventa comprensibile se osservata da un punto di vista eccentrico (anamorfosi prospettica) o quando riflessa da uno specchio di forma opportuna (anamorfosi catottrica) [2-9]. Tecniche anamorfiche sono state usate per codificare scritti segreti e schemi, oltre che per il piacere della sorpresa e dell'inganno da illusione ottica [2, 3, 7, 8, 10], come mostrato nella figura 1.



**Figura 1.** A sinistra, un messaggio criptato tramite deformazione da anamorfosi conica. Riuscite a leggere cosa c'è scritto? A destra, anamorfosi conica di un dettaglio di una celebre statua di Michelangelo. Quale?

Recentemente, specchi conici sono stati usati come strumenti di visione panoramica a 360°, ad esempio per la sorveglianza remota di ambienti, la navigazione di robot autonomi, [11-13], il controllo di condutture [14], l'endoscopia [15]. La figura 2 mostra un esempio di sistema di visione panoramica.

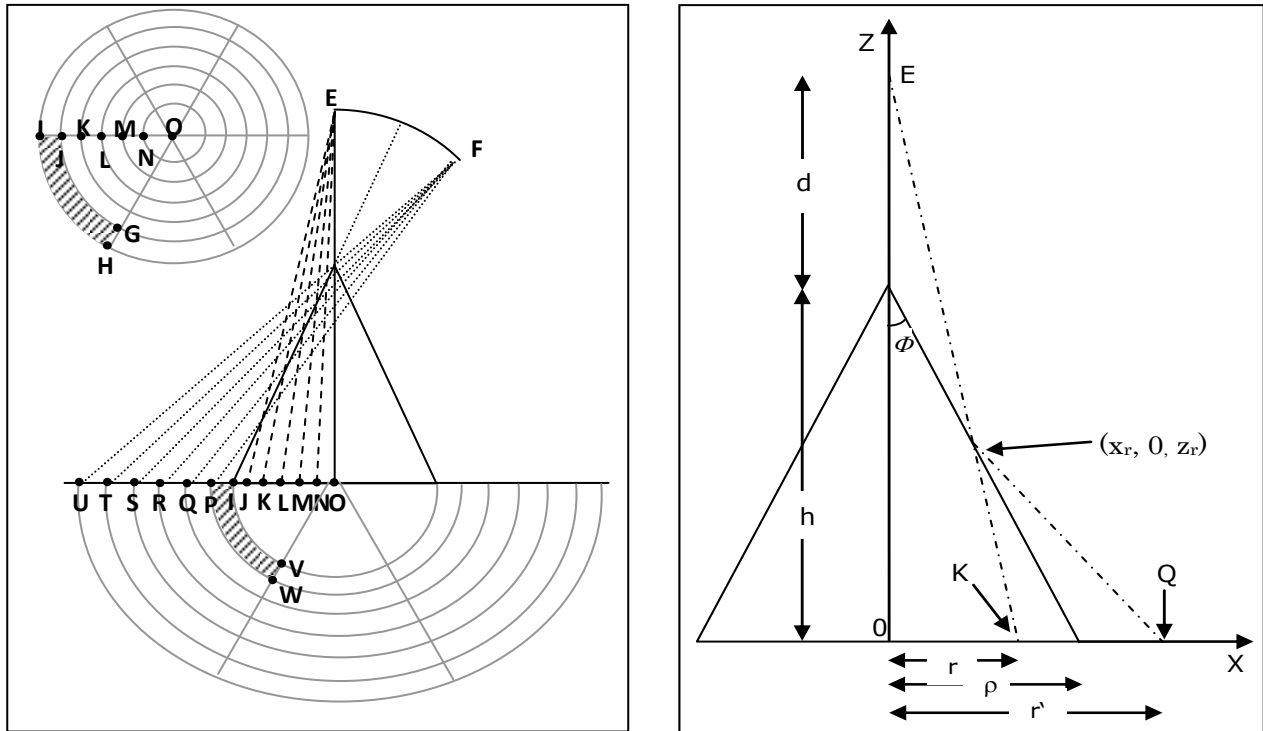


**Figura 2.** A sinistra, principio di funzionamento di un sistema di imaging panoramico. Lo specchio conico riflette il raggio proveniente dall'esterno verso la telecamera posta sotto il vertice dello stesso specchio. A destra, immagine catturata dalla telecamera [16]. Con un singolo fotogramma è possibile visualizzare tutti gli oggetti posti a  $360^\circ$  intorno allo specchio conico. Sono visibili la strada, due automobili, portoni, caseggiati, e un'antenna. La zona circolare al centro è buia perché l'area vicina al vertice del cono riflette i raggi fuori dell'angolo solido di accettazione della telecamera.

Quando guardiamo un oggetto riflesso da uno specchio piano o convesso, stiamo osservando la sua immagine come se i raggi provenissero da dietro lo specchio. L'immagine riflessa si dice perciò "virtuale". Nel caso dello specchio piano, l'immagine virtuale dell'oggetto riflesso si trova dietro lo specchio ad una distanza pari alla distanza tra l'oggetto e il piano dello specchio, mentre l'immagine virtuale data da uno specchio convesso si trova dietro lo specchio ad una distanza minore [17]. Il calcolo ottimale dei sistemi ottici di imaging richiede di sapere dove si forma l'immagine virtuale generata dall'ottica utilizzata. Sfortunatamente, gli unici calcoli disponibili dell'immagine virtuale di coni riflettenti sono relativi a specchi conici cavi [18-20], utilizzati come strumenti di allineamento nella configurazione *axicon*, cioè, con la sorgente di luce che illumina la base del cono e viene riflessa dalla superficie interna del cono stesso. In questo lavoro presentiamo i calcoli analitici esatti e i risultati sperimentali dell'immagine virtuale creata dalla riflessione della superficie esterna di specchi conici solidi con angolo al vertice minore di  $90^\circ$ , che riflettono immagini poste sul piano della base del cono, come nel caso delle anamorfosi catottriche. I risultati mostrano che l'immagine virtuale si trova su una superficie 3-D complessa e non intuitiva.

## 2. ANAMORFOSI CONICHE, APPROCCIO GEOMETRICO

Il primo trattato sulle anamorfosi coniche risale al 1638 [1], quando il frate minimo Nicéron descrive la tecnica per realizzare le anamorfosi catottriche da deformazione cilindrica, piramidale e conica. Nella figura 3a l'immagine originale viene riportata in un cerchio diviso in 6 corone circolari e altrettanti raggi, per un totale di 36 settori. Questi settori sono riportati sulla base di uno specchio conico solido e viene tracciata una linea che congiunge il punto di vista dell'osservatore posto in "E" con ogni punto che delimita i settori (segmenti E-N fino a E-J in figura 3a). L'intersezione di ciascun segmento con il cono è il punto di riflessione del punto corrispondente dell'anamorfosi da disegnare sul piano della base del cono. A partire dal punto F, simmetrico di E rispetto al prolungamento della superficie del cono, si tracciano le linee che passano per i suddetti punti di riflessione, fino ad arrivare al piano su cui poggia il cono. Quindi si ha una corrispondenza tra i punti J-K-L-M-N-O del disegno originale con i punti P-Q-R-S-T-U del piano su cui poggia il cono e quindi una corrispondenza tra i 36 settori originali e i settori anamorfici. Ad esempio, nella figura 3a il settore GHJ corrisponde al settore anamorfico WVIP. In questo modo, ogni settore del cerchio viene deformato in settori di corone circolari aventi raggi differenti. L'immagine originale viene distorta a causa della deformazione dei settori e il disegno deformato è anamorfico perché viene ripristinato nelle proporzioni originali quando l'osservatore lo guarda riflesso da sopra il vertice dello specchio conico, vedi figure 3b e 4.



**Figura 3.** a) Schema utilizzato da Niceron in [1] per costruire anamorfosi coniche. Il disegno originale viene suddiviso in 36 settori, riportati sulla base all'esterno del cono grazie alla "riflessione" delle linee di vista corrispondenti. b) Sezione dello specchio conico nel piano X,Z. L'osservatore in E vede il punto Q sul piano, riflesso dalla superficie del cono in  $(x_r, 0, z_r)$  come se fosse in K.

**Figura 4.** A sinistra in alto: scritta anamorfica della figura 1 ricostruita via software.

A destra in alto: ricostruzione sperimentale con uno specchio conico di raggio 4.5 cm e altezza 18 cm realizzato con una pellicola di PET. L'immagine è fotografata da una distanza di 110 cm dal piano anamorfico.

In modo analogo, per l'anamorfismo del volto della Madonna nella Pietà di Michelangelo in figura 1: a sinistra in basso, anamorfosi ricostruita via software. A destra in basso, fotografia dell'anamorfosi ricostruita tramite lo stesso specchio conico della figura 4a.



Nella figura 4 riportiamo la ricomposizione (sia sperimentale, sia via software) delle due anamorfosi di figura 1. Ponendo lo specchio conico sopra il cerchio al centro dell'anamorfosi, l'osservatore posto sopra il vertice dello specchio percepisce l'immagine virtuale della scritta/immagine ricostruita come se fosse disegnata sulla base del cono, in accordo con lo schema in figura 3b. Notiamo che le parti vicine al centro dell'immagine originale vengono distribuite lungo tutto il cerchio periferico dell'anamorfosi. L'inversione radiale e la diffusione angolare dell'immagine originale danno luogo ad una scritta/immagine anamorfica quasi impossibile da decifrare senza lo specchio conico.

In termini matematici, l'anamorfosi conica è una trasformazione di coordinate da anelli concentrici di raggio  $r$  ad anelli di raggio  $r'$ . Nell'approccio geometrico, vedi figura 3b, considerando il centro della base del cono come il centro di un sistema di coordinate, i calcoli dettagliati in Appendice 1 forniscono la relazione tra  $r'$  ed  $r$  come [5, 7]:

$$r' = r + 2h \left( \frac{\rho - r}{\rho - hA} \right) \left( \frac{1 - AB - A^2}{B + 2A} \right) \quad (1)$$

dove  $h$  è l'altezza del cono,  $\rho$  è il raggio della base del cono,  $A = r/(d+h)$  dove  $d$  è la distanza tra l'osservatore e il vertice del cono, e  $B = (h^2 - \rho^2)/(\rho h)$ . Per definizione,  $r' > \rho > r$ .

Nel frequente caso in cui l'osservatore si trova ad una distanza  $d \gg h$ , l'Eq. (1) si semplifica in

$$r' \approx r + 2h^2 \frac{\rho - r}{h^2 - \rho^2} = r + \frac{2(\rho - r)}{1 - \tan^2 \phi} \quad (2)$$

dove  $\phi$  è la metà dell'angolo al vertice del cono. Questa approssimazione richiede  $h > \rho$ , e quindi  $\phi < 45^\circ$ .

Per stimare l'estensione di un'anamorfosi conica, notiamo che la parte più esterna dell'anamorfosi conica corrisponde alla parte del disegno originale vicina a  $r = 0$ . Quindi possiamo definire l'ingrandimento  $M$  dell'anamorfosi rispetto al disegno originale come il rapporto tra  $r'$  massimo (per il quale  $r \rightarrow 0$ ) e il raggio del cono. Dall'Eq. (2) otteniamo

$$M = \frac{2}{1 - \tan^2 \phi} .$$

Ad esempio, un cono di semiapertura  $\phi = 30^\circ$  ha  $M = 3$ , e di conseguenza un disegno inscritto in un cerchio di 10 cm di diametro avrà il corrispondente disegno anamorfico inscritto in una corona circolare di diametro massimo pari a 30 cm. Le anamorfosi riportate nelle figure 1 e 4 sono state ottenute con un cono di semiapertura  $\phi = 14^\circ$ , cui corrisponde un ingrandimento  $M = 2.13$ .

Notiamo che  $M$  diverge per  $\phi \rightarrow 45^\circ$ . In questo caso, infatti,  $h \rightarrow \rho$  e lo specchio conico non riflette più il disegno sul piano della base del cono in direzione dell'osservatore: l'approssimazione che porta all'Eq. (2) non è più valida.

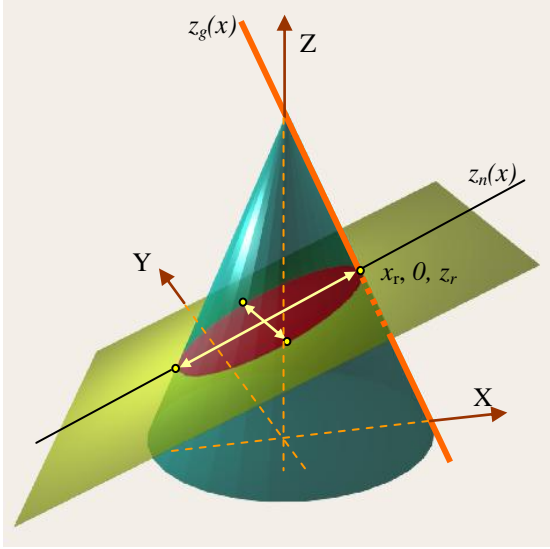
Sin dagli anni '80 le equazioni (1) e (2) sono state usate per creare anamorfosi coniche [4-8], spesso usando software dedicati [9], e i risultati sono soddisfacenti, come mostrato in figura 4. Tuttavia, non abbiamo trovato in letteratura un calcolo analitico esatto della superficie dove si forma l'immagine virtuale degli specchi conici solidi. Nei lavori [2-9] viene accettata la costruzione geometrica di Nicéron [1], vedi figura 3, che implicitamente assume l'immagine virtuale dell'anamorfosi coincidente con il piano della base del cono. Nel prossimo paragrafo ci proponiamo di verificare se questa assunzione è corretta.

### 3. ANAMORFOSI CONICHE, TRATTAZIONE ANALITICA ESATTA

Uno specchio conico è formato dalla combinazione di uno specchio piano in XZ, YZ e di uno convesso in XY, vedi figura 5. La linea  $z_g$  sulla parete del cono giace sulla componente piana dello specchio. Quando il semiangolo al vertice  $\phi$  è minore di  $45^\circ$ , il piano normale a  $z_g$  genera un'ellisse sulla superficie del cono che rappresenta la componente convessa dello specchio conico. Gli assi ottici di entrambe le componenti sono inclinati dell'angolo  $\phi$  rispetto alla base del cono. Dato un oggetto che si riflette su uno specchio conico, la componente piatta dello specchio genera una immagine virtuale identica allo stesso oggetto, mentre la

componente convessa fa divergere i raggi provenienti dall'oggetto generando un'immagine virtuale lungo una riga focale. Questa discrepanza produce aberrazioni astigmatiche [13].

Per calcolare la riga focale della componente convessa associata a un generico punto sul piano anamorfico dobbiamo calcolare la lunghezza focale dello specchio nel punto di riflessione  $(x_r, y_r, z_r)$ , cioè, il suo raggio di curvatura. Riferendoci alle figure 3b e 5, l'equazione del cono è:



**Figura 5.** Geometria dello specchio conico rilevante per il calcolo dell'immagine virtuale. Vedi testo per la spiegazione dei simboli.

$$x^2 + y^2 - \frac{\rho^2}{h^2}(z - h)^2 = 0, \quad (3)$$

Mentre l'equazione della linea sul lato del cono per  $Y = 0$  è

$$z_g(x) = -\frac{h}{\rho}x + h. \quad (4)$$

Il piano perpendicolare a (4), passante per il punto generico  $(x_r, 0, z_r)$  in figura 5, è dato da

$$z_n(x) = \frac{\rho}{h}x + z_r - \frac{\rho}{h}x_r. \quad (5)$$

L'intersezione tra il cono (3) e il piano (5) genera l'ellisse

$$x^2 + y^2 - \frac{\rho^2}{h^2}\left(\frac{\rho}{h}x + z_r - \frac{\rho}{h}x_r - h\right)^2,$$

i cui semi-assi sono, in modulo (vedi Appendice 2):

$$S_{min} = x_r \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

$$S_{max} = x_r \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}$$

dove  $t = \rho/h = \tan\phi$ . Possiamo quindi dedurre il raggio di curvatura  $R$  della componente convessa dello specchio conico nel punto generico  $(x_r, 0, z_r)$  che riflette il punto  $Q$  verso l'osservatore  $E$  (vedi figura 3) come [21]:

$$R(x_r) = \frac{S_{min}^2}{S_{max}} = x_r \sqrt{1+t^2},$$

ovvero,

$$R(z_r) = t(h - z_r)\sqrt{1+t^2}. \quad (6)$$

La distanza  $q(z_r)$  dalla superficie del cono dell'immagine di un punto generico  $Q(r')$  riflesso dalla componente convessa dello specchio in  $(x_r, 0, z_r)$  verso  $E$  (figura 3b) è data dalla seguente equazione parassiale dello specchio

$$\frac{1}{Q_{\perp}(r')} + \frac{1}{q(z_r)} = -\frac{2}{R(z_r)} \quad (7)$$

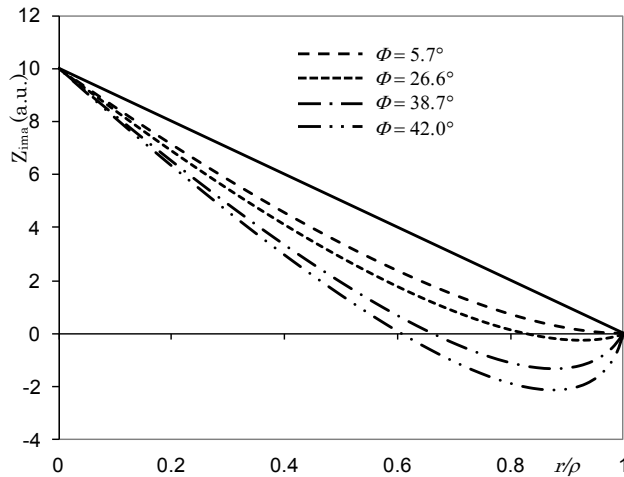
dove  $Q_{\perp}$  è la distanza minima di  $Q(r')$  dalla linea (4). La funzione  $q(z_r)$  è la riga focale che stiamo cercando. Usando le Eq. (6) e (7), dopo alcuni passaggi riportati in Appendice 2, otteniamo l'effettiva distanza dell'immagine di un punto generico  $Q(r')$  dalla superficie del cono come:

$$q(z_r) = \frac{t(h - z_r)(r' - \rho)(1 + t^2)}{t(h - z_r)(1 + t^2) + 2(r' - \rho)} \cos\phi \quad (8)$$

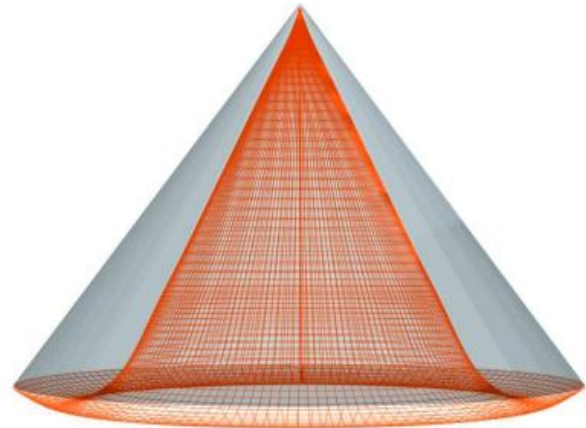
La distanza  $q(z_r)$  nell'Eq. (8) è misurata a partire dalla superficie del cono verso l'interno. L'intersezione dell'Eq. (8) con la linea di vista fornisce la posizione dell'immagine del punto anamorfico  $Q(r')$  riflesso in  $(x_r, 0, z_r)$ . Infatti, la linea di vista è il segmento che parte da  $E$ , passa in  $(x_r, 0, z_r)$  e arriva al punto dell'immagine virtuale della componente piana dello specchio conico, vedi figura 3b. Infine, l'Eq. (1) fornisce la coordinata  $r$  corrispondente a  $Q(r')$ . Ripetendo questa procedura per ogni punto  $Q(r')$  del disegno

anamorfico otteniamo la superficie  $Z_{\text{ima}}(r)$  dell'immagine virtuale dell'anamorfo. In alternativa, una deduzione analitica di  $Z_{\text{ima}}(r)$  nel caso  $d \gg h$  è dettagliata nell'Appendice 3.

La figura 6 mostra il grafico di  $Z_{\text{ima}}(r)$  in funzione di  $r/\rho$  per diversi valori di  $\phi$  e considerando un punto di vista distante  $4h$  dal vertice del cono. Vediamo che la superficie dell'immagine virtuale non coincide affatto con il piano della base del cono, come assunto in [1-9]. Piuttosto, si tratta di una superficie 3-D complessa, a forma di cappello da fattucchiera, che parte dalla circonferenza che delimita la base del cono, diventa negativa (cioè, passa sotto la base) per alcuni valori di  $r$  e  $\phi$ , poi sale fino al vertice, vedi figura 7.



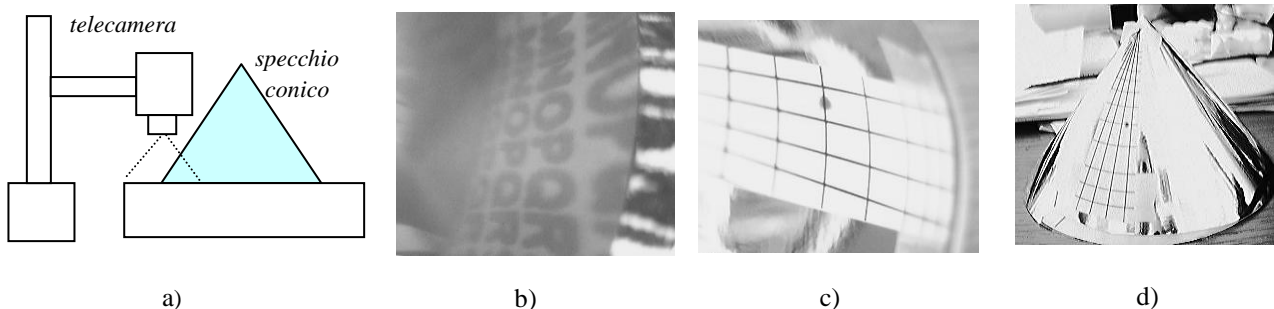
**Figura 6.** Grafico della superficie dell'immagine virtuale  $Z_{\text{ima}}(r)$  nel piano XZ in funzione del raggio normalizzato  $r/\rho$  per differenti valori di  $\phi$  e per un punto di vista distante  $4h$  dal vertice del cono. La linea continua mostra la superficie del cono.



**Figura 7.** La griglia interna al cono rappresenta la superficie 3-D dell'immagine virtuale dell'anamorfo conica per  $\phi = 38.7^\circ$ .

#### 4. MISURE SPERIMENTALI

Abbiamo realizzato diversi specchi conici utilizzando pellicole di PET, carte di materiali lucidi riflettenti e un vetro acrilico massiccio lucidato. Tramite una fotocamera CMOS (640×480 pixels) con messa a fuoco manuale, posta perpendicolare alla base del cono, abbiamo trovato il miglior piano focale dell'immagine virtuale di un disegno posto sul tavolo in una data posizione radiale del cono, vedi figura 8.

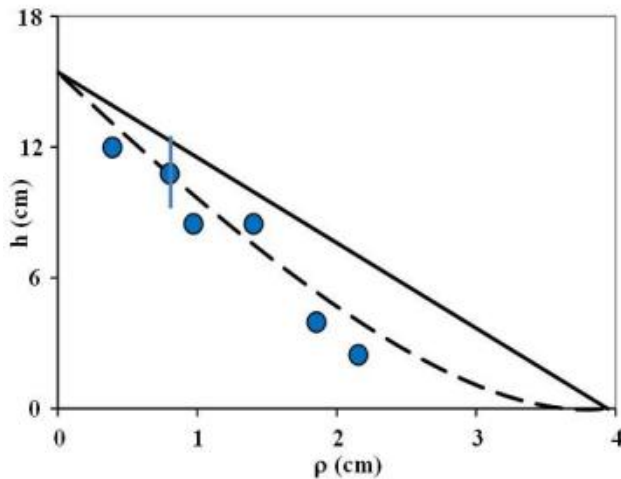


**Figura 8.** a) Schema dell'apparato sperimentale usato per la misura dell'immagine virtuale di una scritta/disegno posto sul piano dove poggia la base dello specchio conico. Per poter misurare valori negativi dell'altezza dell'immagine virtuale (posti cioè sotto la base dello specchio conico) abbiamo poggiato lo specchio sopra un rialzo sul tavolo. b) Esempio di misura del piano focale della scritta sulla base riflessa dal cono. c) Misura della distanza focale tramite scala graduata su un cono graduato posto sul tavolo. d) Specchio conico graduato.

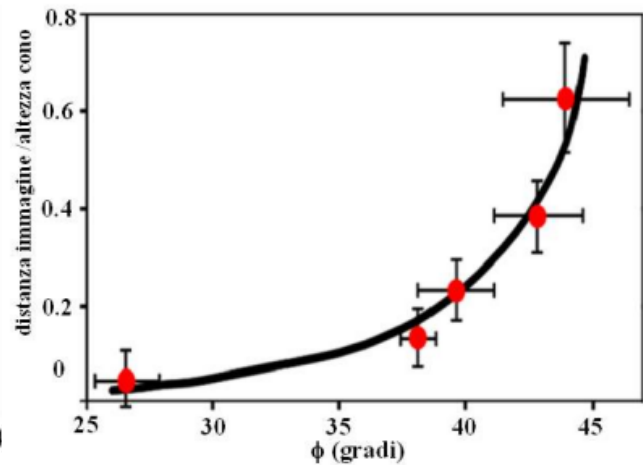
Abbiamo ripetuto la misura della posizione dell'immagine virtuale per differenti posizioni radiali di ogni specchio conico, e diverse volte per ciascuna posizione radiale in modo da avere una statistica da cui ricavare

media e varianza del risultato sperimentale. A titolo esemplificativo, la figura 9 mostra i risultati per lo specchio con  $\phi = 14.6^\circ$ .

Inoltre, per ogni specchio conico avente  $\phi > 26^\circ$  abbiamo misurato il massimo valore dell'altezza negativa dell'immagine virtuale vicino alla base, previsto nelle figure 6 e 7, ed i risultati sono riassunti nella figura 10. Abbiamo già sottolineato che gli specchi conici sono astigmatici [13], cioè i raggi sagittali e meridionali riflessi generano diverse immagini virtuali in luoghi diversi. Le barre di errore verticale nelle figure 9 e 10 tengono conto dei risultati di diverse misure nella stessa posizione radiale del cono, che danno risultati leggermente diversi principalmente a causa delle aberrazioni astigmatiche, così come di alcuni limiti dell'apparato sperimentale.



**Figura 9.** Linea tratteggiata: superficie dell'immagine virtuale  $Z_{ima}(r)$  nel piano XZ del cono con  $\Phi = 14.6^\circ$ . Cerchi: risultati sperimentali dell'immagine virtuale. La riga solida mostra la superficie del cono, come riferimento.



**Figura 10.** Linea piena: valori teorici del modulo dell'altezza negativa dell'immagine virtuale vicino alla base degli specchi conici, normalizzata all'altezza dei coni, in funzione della semiapertura  $\Phi$  del vertice dei coni. Cerchi: risultati sperimentali.

## 5. DISCUSSIONE DEI RISULTATI

I risultati dei calcoli analitici (vedi Eq. (8), figure 6 e 7) e degli esperimenti (figure 9 e 10) dimostrano che la superficie dell'immagine virtuale di specchi conici ha una forma 3-D complessa. A questo punto è lecito domandarsi perché percepiamo l'immagine virtuale di anamorfose coniche 'ben ricostruita' (vedi, ad esempio, la figura 4) come se si trattasse di un'immagine 2-D alla base dello specchio conico, in apparente accordo con la costruzione geometrica della figura 3.

Il motivo è dovuto all'effetto cumulativo di cause concomitanti. Ad esempio, le anamorfose coniche si apprezzano meglio se osservate con un occhio solo (per evitare gli effetti correttivi della visione binoculare [2-8]) e da una distanza pari ad almeno tre o quattro volte l'altezza del cono. Da una tale distanza, la profondità di fuoco del nostro occhio è abbastanza grande da impedire la percezione della profondità della superficie su cui si colloca l'immagine virtuale, generando quindi la sensazione di osservare un'immagine piatta.

Questo meccanismo è rinforzato dalla nostra innata tendenza ad accomodare l'intera immagine a fuoco, riducendo la dimensione della pupilla per aumentare ulteriormente la profondità di fuoco dell'occhio. E' il caso di sottolineare che la modifica della dimensione di pupilla è un meccanismo automatico, non conscio, e quindi è indipendente dalla nostra volontà [22].

Infine, quando percepiamo l'intera immagine a fuoco, la nostra esperienza e la psicologia della Gestalt [23] portano a scegliere la soluzione percettiva più naturale perché più frequente, e ci convincono che stiamo osservando un'immagine 2-D posta alla base del cono.

## 6. CONCLUSIONI

Abbiamo presentato la prima trattazione analitica esatta e i primi risultati sperimentali della superficie su cui si colloca l'immagine virtuale generata da specchi conici solidi aventi l'angolo al vertice  $2\phi < 90^\circ$ , che sono in grado di riflettere immagini/disegni posti sul piano della base del cono, come quelli utilizzati nella ricostruzione e imaging di anamorfosi catottriche, vedi figura 4.

I nostri risultati (figure 6, 7, 9, 10) dimostrano che l'immagine virtuale di specchi conici si trova su una superficie tridimensionale non intuitiva, mostrando così come la costruzione geometrica comunemente usata (vedi figura 3) è inadeguata per trovare la posizione corretta dell'immagine virtuale.

Infine, abbiamo discusso i processi di percezione visiva che portano alla sensazione di “vedere” l'immagine virtuale dell'anamorfosi conica su una superficie bidimensionale assai diversa da quella misurata.

Il metodo analitico presentato in questo lavoro può essere esteso a specchi conici aventi  $2\phi > 90^\circ$  come quelli utilizzati come strumenti di imaging panoramico [11-16], vedi figura 2, ma in questo caso l'intersezione del cono (Eq. (3)) con il piano (Eq. (5)) produce un'iperbole invece di un'ellisse nella figura 5. Questa estensione potrà essere oggetto di un articolo successivo.

## APPENDICE 1

*Come si ottiene l' Eq. (1) che determina la relazione analitica tra i punti del disegno originale e quelli del disegno anamorfico.*

Consideriamo il disegno della sezione di un cono rappresentata dal triangolo isoscele TVU di raggio  $\rho$ , altezza  $h$  e di angolo al vertice pari a  $2\phi$ .

Per definizione,  $\phi = \tan(\rho/h)$ . Prolungando l'altezza  $h$  di un segmento pari a  $VE$ , lungo  $d$ , la retta che da  $E$  porta al punto  $K$  incontrerà la superficie del cono nel punto  $R$ . L'angolo di incidenza  $\beta$  è analogo all'angolo di riflessione, per cui possiamo tracciare il segmento che passa per  $R$  ed arriva sulla base su cui poggia il cono, nel punto  $Q$ . Il punto  $K$ , sotto la base del cono e distante  $r$  dal centro, è quindi il corrispettivo del punto  $Q$ , a distanza  $r'$  dal centro, che fa parte del disegno anamorfico.

Dal triangolo EVR abbiamo

$$\phi = \alpha + \beta .$$

ovvero

$$2\phi - \alpha = \alpha + 2\beta .$$

La lunghezza  $r'$  è pari ad  $r + QK$ .

Quest'ultimo segmento è pari alla differenza tra  $QP$  e  $KP$  che sono entrambi cateti di un triangolo rettangolo in  $P$ .

Detta  $a$  la distanza tra  $V$  e  $S$ , ( $S$  è la proiezione di  $R$  sull'altezza del cono, vedi figura) si ha che:

$QP = (h-a) \tan(\alpha+2\beta) = (h-a) \tan(2\phi - \alpha)$ , e inoltre

$KP = (h-a) \tan\alpha$ .

Pertanto:

$$r' = r + (h - a) \cdot [\tan(2\phi - \alpha) - \tan\alpha]. \quad (A1)$$

Poniamo

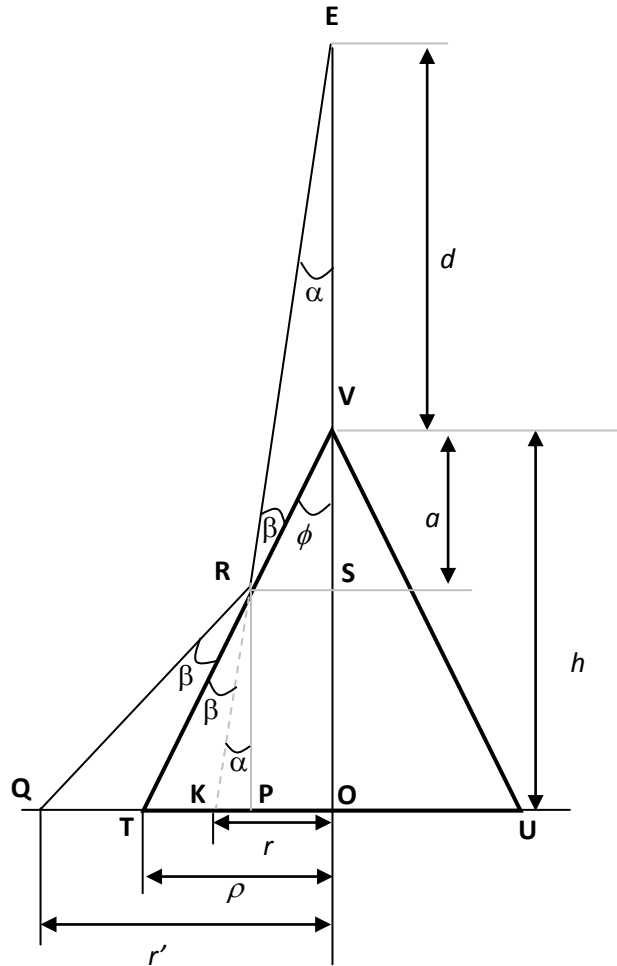
$$A = \tan(\alpha) = \frac{r}{d+h}$$

$$B = \frac{2}{\tan(2\phi)} = \frac{h^2 - \rho^2}{\rho h}$$

Quest'ultima uguaglianza si ottiene ricordando che  $\tan\phi = \rho/h$ . Infatti, usando l'equazione

$$\tan(2\phi) = 2 \frac{\tan\phi}{1 - \tan^2\phi},$$

possiamo scrivere



$$\tan(2\phi) = 2 \frac{\frac{\rho}{h}}{1 - \frac{\rho^2}{h^2}} = 2 \frac{\rho h}{h^2 - \rho^2}$$

da cui l'equazione per  $B$  scritta in precedenza.

Consideriamo ora i triangoli rettangoli VRS e VTO in figura. Per il criterio di similitudine si ha che

$$VS / VO = RS / TO, \text{ ovvero } a/h = (d+a) \cdot \tan \alpha / \rho = (d+a) \cdot A / \rho$$

da cui

$$a = hdA / (\rho - hA) \text{ e quindi } h - a = h \cdot \left( 1 - \frac{dA}{\rho - hA} \right).$$

Riscriviamo l'equazione (A1) raggruppando i termini uguali e sostituendo il termine  $(h-a)$ :

$$r' = r + h \left( 1 - \frac{dA}{\rho - hA} \right) \cdot [\tan(2\phi - \alpha) - \tan \alpha] \quad (A2)$$

Un nota formula di trigonometria sulla tangente della differenza di due archi ci permette di scrivere:

$$\tan(2\phi - \alpha) - \tan(\alpha) = \frac{\tan(2\phi) - 2 \tan \alpha - \tan(2\phi) \tan^2 \alpha}{1 + \tan(2\phi) \tan \alpha}$$

per cui

$$\tan(2\phi - \alpha) - \tan(\alpha) = \frac{2/B - 2A - 2A^2/B}{1 + 2A/B} = \frac{2(1 - AB - A^2)}{B + 2A} \quad (A3)$$

Sostituendo (A3) in (A2), infine, abbiamo

$$r' = r + h \left( 1 - \frac{dA}{\rho - hA} \right) \left[ \frac{2(1 - AB - A^2)}{B + 2A} \right] \quad (A4)$$

Ricordando che  $A = r/(h+d)$ , dalla Eq. (A4) otteniamo l'Eq. (1) del Rapporto:

$$r' = r + 2h \left( \frac{\rho - r}{\rho - hA} \right) \left( \frac{1 - AB - A^2}{B + 2A} \right) \quad (1)$$

come volevasi dimostrare.

Grazie alla simmetria assiale, per trasformare un disegno nel suo anamorfismo conico è sufficiente che ogni punto del disegno originale, di coordinate polari  $(r, \theta)$ , venga mappato nel corrispondente punto di coordinate  $(r', \theta)$ , con  $r'$  legato ad  $r$  dall'Eq. (1). Tuttavia, poiché il disegno anamorfico è più esteso di quello originale, non vi è una corrispondenza 1:1 tra i singoli punti dei due disegni. Volendo progettare un software per realizzare delle anamorfosi, dunque, è necessario invertire l'equazione precedente e trovare, per ogni punto del disegno anamorfico, il corrispondente punto dell'immagine originale. In questo modo il piano anamorfico sarà uniformemente mappato, anche nel caso in cui la risoluzione dell'immagine originale non sia elevata.

## APPENDICE 2

*Come si ottiene l'Eq. (8) che determina la linea focale della componente convessa di uno specchio conico.*

Dato uno specchio di raggio di curvatura  $R$  noto, la sua lunghezza focale è data da  $f = R/2$ . Per calcolare la focale dello specchio conico è dunque necessario conoscere il raggio di curvatura nel punto in cui viene riflessa l'immagine anamorfica. La curvatura dello specchio varia lungo l'altezza del cono, quindi  $R = R(z)$ . Come evidenziato nel Rapporto, inoltre, la componente convessa dello specchio conico appartiene ad una ellisse rappresentata dall'intersezione del piano perpendicolare al cono nel punto di riflessione con il cono stesso.

Consideriamo la figura 5 del Rapporto e la figura a lato. I semiassi dell'ellisse (di cui si vede la sezione tratteggiata nella figura a lato) sono dati rispettivamente da [21]:

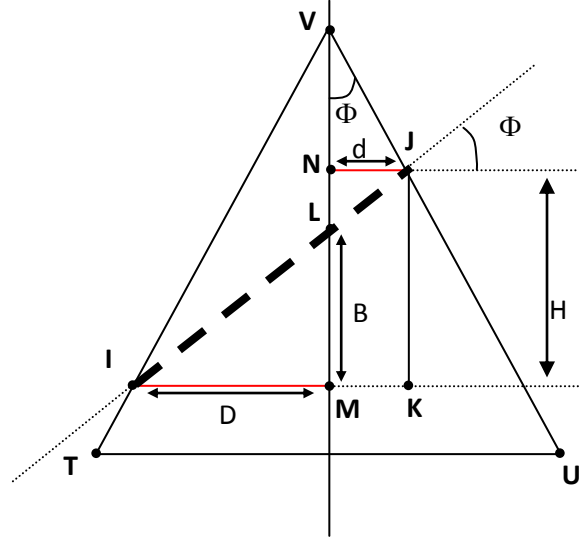
$$a = \frac{D+d}{2 \cos \phi} \quad b = \sqrt{D \cdot d} .$$

Dati i due triangoli VMI e VNJ abbiamo:

$$H = \frac{D-d}{\tan \phi} \quad (A5)$$

Considerando i triangoli ILM e IJK possiamo scrivere la seguente relazione:

$$\frac{H}{D+d} = \frac{B}{D} = \tan \phi \quad (A6)$$



Combinando (A5) e (A6) abbiamo:

$$\frac{D-d}{\tan \phi} \cdot \cos \phi = (D+d) \cdot \tan \phi \quad (A7)$$

Usando gli stessi simboli del Rapporto, ovvero  $t = \tan \phi$  e  $x_r = d$ , l'Eq. (A7) porta al seguente risultato:

$$D = x_r \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} .$$

A questo punto possiamo calcolare i semiassi dell'ellisse:

$$b = \sqrt{D \cdot x_r} = x_r \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

e

$$a = \frac{D+x_r}{2 \cos \phi} = \frac{x_r \cdot \left[ 1 + \frac{1+t^2}{1-t^2} \right]}{2 \cos \phi} = \frac{x_r}{(1-t^2) \cdot \cos \phi} .$$

Poiché  $\tan \phi = \frac{\sqrt{1-\cos^2 \phi}}{\cos \phi} \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ,

da cui  $a = x_r \cdot \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}$

Abbiamo quindi ottenuto le formula dei semiassi  $S_{\min}$  e  $S_{\max}$  del Rapporto.

Il raggio di curvatura dell'ellisse sull'asse maggiore vale [21]:

$$R = \frac{b^2}{a} = x_r^2 \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{1}{x_r \cdot \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}} = x_r \cdot \sqrt{1+t^2} = x_r \cdot \frac{1}{\cos\phi} \quad (\text{A8})$$

Come previsto, il raggio di curvatura dipende dal valore  $x_r$  (o, equivalentemente, da  $z_r$ ), ovvero dal punto sullo specchio in cui si osserva la riflessione di un particolare punto dell'anamorfo.

Ci proponiamo, ora, di passare dalla formula del raggio di curvatura alla formula che esprime la distanza dalla superficie del cono dell'immagine virtuale dei raggi provenienti dal disegno anamorfo.

Data una distanza minima  $Q_{\perp}$  tra la linea generatrice dello specchio conico  $z_g$  (vedi Eq. (4) e figura 5) e il punto del disegno anamorfo che si riflette in  $x_r$ , la distanza dalla superficie del cono su cui verrà formata la sua immagine virtuale  $q(z_r)$  è data dall'Eq. (7) del Rapporto (formula parassiale dello specchio):

$$\frac{1}{Q_{\perp}(r')} + \frac{1}{q(z_r)} = -\frac{2}{R(z_r)}, \quad (7)$$

dove il segno “-” indica che lo specchio è convesso, quindi si comporta come una lente divergente.

Dall'Eq. (7) otteniamo:

$$q(z_r) = -\frac{Q_{\perp}(r')R(z_r)}{R(z_r) + 2Q_{\perp}(r')} \quad (\text{A9})$$

Il valore di  $Q_{\perp}(r')$  si ottiene tracciando la perpendicolare alla linea generatrice del cono  $z_g$  (Eq. (4)) dal punto Q della figura 3b del Rapporto e vale:

$$Q_{\perp}(r') = (r' - \rho) \cos\phi \quad (\text{A10})$$

Sostituendo (A10) e (A8) nell'Eq. (A9) otteniamo:

$$q(z_r) = \frac{x_r(r' - \rho)}{x_r + 2(r' - \rho)\cos^2(\phi)} \cos\phi$$

in cui abbiamo eliminato per comodità il segno ‘-’ e ricordando, quindi, che da ora in poi valori positivi vanno intesi come diretti dalla superficie verso l'interno del cono.

Poiché  $x_r = t(h - z_r)$  e  $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$  la stessa relazione può essere scritta nella forma equivalente

$$q(z_r) = \frac{t(h - z_r)(r' - \rho)(1 + t^2)}{t(h - z_r)(1 + t^2) + 2(r' - \rho)} \cos\phi$$

che è l'Eq. (8) del Rapporto, come volevasi ottenere.

### APPENDICE 3

*Come esplicitare la funzione che rappresenta il piano dell'immagine virtuale rispetto alla coordinata polare del disegno originale.*

Ci proponiamo di ricavare l'equazione che rappresenta il piano immagine virtuale in funzione della sola coordinata  $r$ .

Richiamiamo le equazioni del Rapporto coinvolte nella definizione del piano immagine:

$$\text{Eq. (1):} \quad r' = r + 2h \left( \frac{\rho - r}{\rho - hA} \right) \left( \frac{1 - AB - A^2}{B + 2A} \right)$$

$$\text{Eq. (2):} \quad r' \approx r + \frac{2(\rho - r)}{1 - \tan^2 \phi}$$

$$\text{Eq. (8):} \quad q(z_r) = \frac{t(h - z_r)(r' - \rho)(1 + t^2)}{t(h - z_r)(1 + t^2) + 2(r' - \rho)} \cos \phi$$

Possiamo usare l'Eq.(2), che è l'approssimazione dell'Eq.(1) nel caso  $d \gg h$ , perché *a posteriori* il risultato è quantitativamente molto simile a quello esatto, senza approssimazioni, ma l'Eq. (2) evita la complicazione di considerare una linea di vista obliqua che interseca la funzione  $q(z_r)$ . Con l'Eq. (2), infatti, la linea di vista è parallela all'asse Z, pertanto è più semplice ottenere la superficie virtuale in modo diretto a partire dalla funzione  $q(z_r)$ .

Il termine  $(h - z_r)$  nell'Eq.(8) è pari alla distanza denominata con la lettera  $a$  nella figura dell'Appendice 1.

Quindi

$$q(z_r) = \frac{at(r' - \rho)(1 + t^2)}{at(1 + t^2) + 2(r' - \rho)} \cos \phi \quad (\text{A11})$$

Dall'Eq. (2), ricordando che  $\tan \phi = t$ , otteniamo:

$$r' - \rho = r + \frac{2(\rho - r)}{1 - t^2} - \rho \quad \Rightarrow \quad r' - \rho = (\rho - r) \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$

L'Eq. (A11) diventa così:

$$q(z_r) = \frac{at(\rho - r)(1 + t^2)}{at(1 - t^2) + 2(\rho - r)} \cos \phi \quad (\text{A12})$$

Non ci resta che calcolare la variabile  $a$ . Osservando la figura dell'Appendice 1 possiamo scrivere:

$$a = h - \text{RP}$$

$$\text{RP} = \text{KP} / \tan \alpha$$

$$\text{KP} = r - \text{PO}$$

$$\text{PO} = a \tan \phi$$

da cui, ricordando che  $\tan \phi = \rho/h = t$ , e che  $\tan \alpha = r/(d+h)$ :

$$a = h - \frac{(r - at)}{\tan \alpha} = h - (r - a) \frac{\rho}{h} \frac{(d + h)}{r} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{hdr}{h \cdot (\rho - r) + \rho d}$$

La funzione  $q(z_r)$  nell'Eq. (A12) ora può essere scritta nella sola variabile  $r$ :

$$q(r) = \frac{h d r t (\rho - r) (1 + t^2)}{h d r t (1 - t^2) + 2(\rho - r) [h \cdot (\rho - r) + \rho d]} \cos \phi$$

che, nell'approssimazione  $d \gg h$  può essere ulteriormente semplificata nella seguente forma:

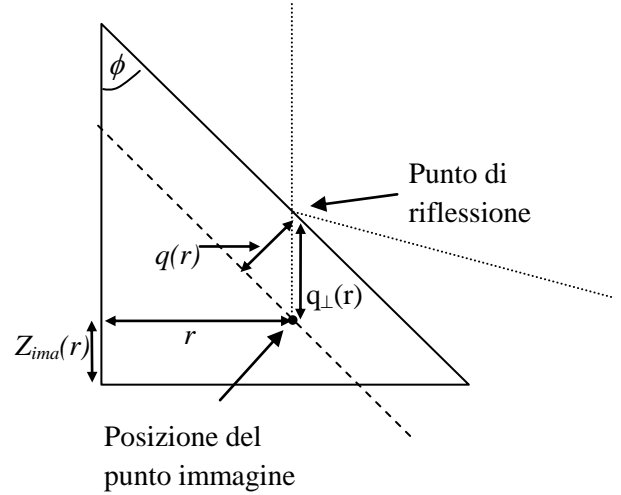
$$q(r) = \frac{r(\rho - r)(1 + t^2)}{r(1 - t^2) + 2(\rho - r)} \cos \phi$$

La curva che rappresenta il piano immagine proiettato su XZ è data dalla differenza tra la funzione che rappresenta la superficie del cono e la distanza a cui si forma l'immagine dalla superficie stessa proiettata sull'asse verticale lungo la direzione della riga focale (distanza di traslazione  $q_{\perp}(r)$ , vedi figura a lato), ovvero:

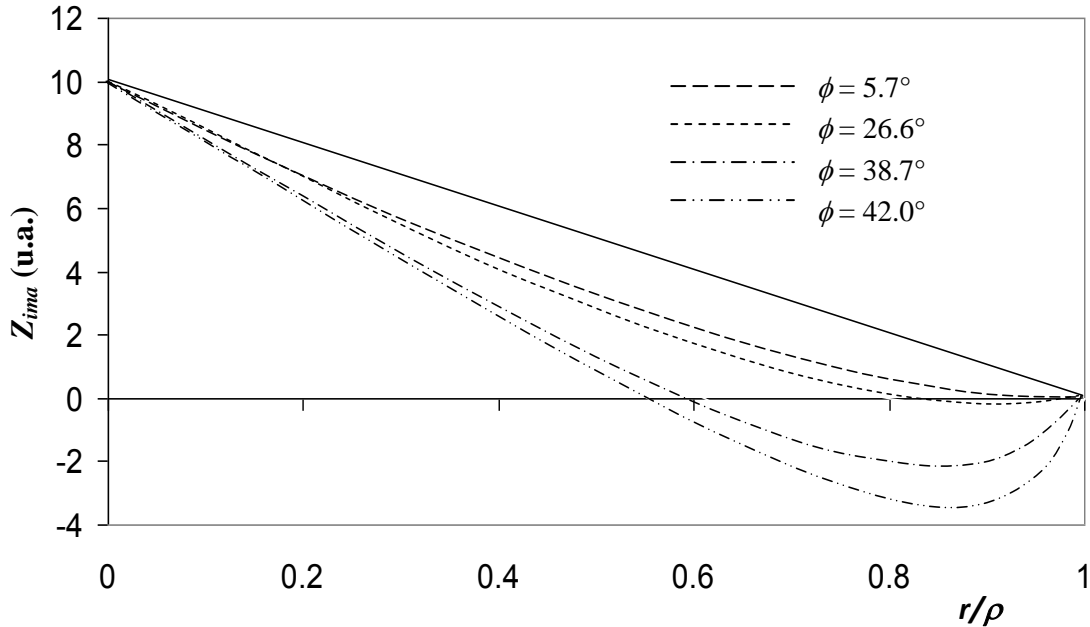
$$Z_{ima}(r) = z_g(r) - q(r)/\sin \phi,$$

dove  $z_g(r)$  è data dall'Eq. (5) del Rapporto e, quindi:

$$Z_{ima}(r) = -\frac{h}{\rho} r + h - \frac{r(\rho - r)(1 + t^2)}{r(1 - t^2) + 2(\rho - r)} \frac{1}{t} \quad (A13)$$



Nel grafico seguente sono mostrate le stesse curve della superficie dell'immagine virtuale già mostrate nella figura 6 del Rapporto, ma ottenute direttamente dall'Eq. (A13), ovvero con il punto di vista all'infinito.



## REFERENZE

- [1] J.F. Nicéron: *La perspective curieuse, ou magie artificielle des effets merveilleux de l'optique par la vision directe* (Paris, 1638).
- [2] M. Gardner: *L'affascinante magia dell'arte anamorfica* Rubrica Giochi Matematici Le Scienze n. 81 vol. XIV (1975) p. 92-99.
- [3] J. Baltrušaitis: *Anamorfoosi o magia artificiale degli effetti meravigliosi* (Adelphi, 1978) p. 139-166.
- [4] J. Walker: *Anamorphic pictures: distorted views from which distortion can be removed* Scientific American **245**, 140-148 (1981).
- [5] J.L. Hunt, B.G. Nickel, C. Gigault: *Anamorphic images* American Journal of Physics **68**, 232-237 (2000).
- [6] A.V. Gitin: *Anamorphosis and distortion* Optics and Spectroscopy **88**, 472-474 (2000).
- [7] P. Di Lazzaro, D. Murra: *Figurative art, perception and hidden images in inverse perspective* Energia Ambiente Innovazione **1-2**, 42-51 (2013). [www.enea.it/it/produzione-scientifica/pdf-eai/n.1-2-gennaio-aprile-2013/10-inverse-perspective-pdf](http://www.enea.it/it/produzione-scientifica/pdf-eai/n.1-2-gennaio-aprile-2013/10-inverse-perspective-pdf) (controllato il 10 Ottobre 2013).
- [8] P. Di Lazzaro, D. Murra: *L'anamorfoosi tra arte, percezione visiva e prospettive bizzarre* Rapporto Tecnico RT/2013/05/ENEA (2013). <http://openarchive.enea.it/bitstream/handle/10840/4479/RT-2013-5-ENEA.pdf?sequence=1> (controllato il 10 Ottobre 2013).
- [9] Vedi, ad esempio, <http://www.anamorphosis.com/software.html> (controllato il 10 Ottobre 2013).
- [10] Pietro Accolti: *Lo inganno degli occhi* (Firenze, 1625) cap. XXXVI, p. 48.
- [11] Y. Yagi, S. Kawato, S. Tsuji: *Real-time omnidirectional image sensor (COPIS) for vision-guided navigation* IEEE Transactions Robotics and Automation **10**, 11-22 (1994).
- [12] J.S. Chahl, M.V. Srinivasan: *Reflective surfaces for panoramic imaging* Applied Optics **36**, 8275-8285, (1997).
- [13] S.S. Lin, R. Bajcsy: *Single-viewpoint, catadioptric cone mirror omnidirectional imaging theory and analysis* Journal of the Optical Society of America A Opt. Image Sci. Vis. **23**, 2997-3015 (2006).
- [14] D. Southwell, B. Vandegriend, A. Basu: *A Conical Mirror Pipeline Inspection System* Proc. ICRA vol. 4, 3253-3258 (1996).
- [15] M. Ou-Yang, W.D. Jeng: *Design and analysis of radial imaging capsule endoscope system* Optics Express **19**, 4369-4383 (2011).
- [16] L. Chen, W. Wang, M. Zhang, W. Bao, X. Zhang: *Complementary-structure catadioptric omnidirectional sensor design for resolution enhancement* Optical Engineering **50**, 033201-(9) (2011).
- [17] Vedi, ad esempio, P.Fleury, J.P. Mathieu: *Immagini ottiche* vol. 4 del *Trattato di Fisica Generale e Sperimentale* (Zanichelli, Bologna 1963).
- [18] J.W.Y. Lit, E. Brannen: *Optical properties of a reflecting cone* Journal of the Optical Society of America **60**, 370-371 (1970).
- [19] J.W.Y. Lit: *Image formation of a reflecting cone for an off-axis source* Journal of the Optical Society of America **60**, 1001-1006 (1970).
- [20] L.M. Soroko: *Meso-optical devices* in Progress in Optics (E. Wolf Editor, Elsevier, 1989) vol. 27 cap. 2, p. 112-119.

[21] Vedi, ad esempio, C. Brogi: *L'opera di Corrado Brogi* cap. II, <http://spazioinwind.libero.it/corradobrogi/> (controllato il 10 Ottobre 2013).

[22] Vedi, ad esempio, B. Wang, K.J. Ciuffreda: *Depth-of-focus of the human eye: theory and clinical implications* *Survey of Ophthalmology* **51**, 75-85 (2006).

[23] Vedi, ad esempio, M. Wertheimer: *Gestalt theory* (Hayes Barton Press, 1944) p. 3-6. Vedi anche K. Lewin, F. Heider, G. Heider: *Principles of topological psychology* (New York, McGraw-Hill 1936) p. 87-92. Per una introduzione elementare, vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Psicologia\\_della\\_Gestalt](http://it.wikipedia.org/wiki/Psicologia_della_Gestalt) (controllato il 10 Ottobre 2013).

Edito dall' **ENEA**  
Servizio Comunicazione

Lungotevere Thaon di Revel, 76 - 00196 Roma

*[www.enea.it](http://www.enea.it)*

Stampa: Tecnografico ENEA - CR Frascati  
Pervenuto il 20.11.2013

Finito di stampare nel mese di gennaio 2014