AGENZIA NAZIONALE PER LE NUOVE TECNOLOGIE,
L'ENERGIA E LO SVILUPPO ECONOMICO SOSTENIBILE

ISSN/0393-3016

VEDIC MATH., MAGIC MATH., ... DAMN MATH.

matematica vedica, matematica magica,... maledetta matematica

GIUSEPPE DATTOLI

ENEA – Unità Tecnica Sviluppo di Applicazioni delle Radiazioni
Laboratorio Modellistica Matematica
Centro Ricerche Frascati, Roma

MARCELLO ARTIOLI

ENEA – Unità Tecnica Efficienza Energetica
Centro Ricerche "E. Clementel", Bologna

RT/2015/6/ENEA

AGENZIA NAZIONALE PER LE NUOVE TECNOLOGIE,
L'ENERGIA E LO SVILUPPO ECONOMICO SOSTENIBILE

VEDIC MATH., MAGIC MATH., ... DAMN MATH.

matematica vedica, matematica magica,... maledetta matematica

GIUSEPPE DATTOLI

ENEA – Unità Tecnica Sviluppo di Applicazioni delle Radiazioni
Laboratorio Modellistica Matematica
Centro Ricerche Frascati, Roma

MARCELLO ARTIOLI

ENEA – Unità Tecnica Efficienza Energetica
Centro Ricerche "E. Clementel", Bologna

RT/2015/6/ENEA

VEDIC MATH., MAGIC MATH., ... DAMN MATH.

matematica vedica, matematica magica,... maledetta matematica

GIUSEPPE DATTOLI, MARCELLO ARTIOLI

Abstract

During the last years an effort has been put forward at ENEA aimed at developing a platform capable of editing scientific books in an interactive mode, namely with the option of modifying either the formulae and graphs.

The idea, developed by the group UT-FIS-MAT, has been that of providing a scientific book equipped with an interactive software like MATHEMATICA allowing the elaboration of a smart text yielding the possibility of interacting with formulae, plots and the text itself, allowing the understanding of the level of confidence acquired by the reader.

In recent times we have developed similar ideas to create a virtual laboratory dedicated to the design of particle accelerators and to Free Electron Lasers and this booklet is a further progress within such a direction. The text we have developed and dedicate to a not specifically scientific trained audience, includes iconographic and scientific material tailor suited for the goal of providing an effective tool illustrating the potentialities of the device and give an account of the historical evolution of a branch of mathematics usually not treated in the high school courses or/and at university level.

***Keywords**: Mathematics, virtual laboratory, scientific dissemination*

Sommario

Da qualche anno, all'interno dell'ENEA, è in atto uno sforzo per utilizzare piattaforme di natura editoriale in grado di integrare la scrittura di testi scientifici con l'immediata fruibilità dello stesso in termini di calcolo, di modifica e/o aggiunte.

L'idea, perseguita all'interno del gruppo UT-FIS-MAT , è stata quella di sviluppare un testo con un supporto interattivo con linguaggi di tipo Mathematica che permettessero di presentare un testo evoluto al punto che sia le formule che i grafici, possano essere modificati in modo da interagire attivamente con il testo stesso, verificando contestualmente il grado di comprensione.

Ne recente passato (M. Artioli, G. Dattoli, P. L. Ottaviani and S. Pagnutti "Virtual Laboratory and Computer Aided Design for Free Electron Lasers outline and simulation"Energia, Ambiente e Innovazione, Maggio-Giugno 2012) un concetto analogo è stato sviluppato per la creazione di un laboratorio virtuale dedicato sia allo sviluppo di macchine acceleratrici che di laser ad elettroni liberi.

Il presente lavoro è una ulteriore testimonianza in tale senso. Abbiamo elaborato infatti un testo di natura divulgativa, fruibile da un pubblico di cultura non necessariamente scientifica, contenente materiale sia iconografico che di formule che si prestasse allo scopo di fornire una testimonianza efficace delle potenzialità del metodo e al contempo di tracciare un profilo storico di concetti ed idea matematiche appartenenti ad un contesto di solito non trattato nei corsi di scuole medie superiori e/o universitari.

Parole chiave: Matematica, laboratorio virtuale, divulgazione scientifica

Indice

Capitolo V

Capitolo VI

Prefazione

Ho sempre avuto (e continuo ad avere) una pregiudiziale riluttanza verso tutto ciò che si vesta di mistico e faccia riferimento ad antiche dottrine.

Quando ero giovane c'era un fiorire di movimenti che si ispiravano a sapienze ancestrali (vere o presunte) e tanti abbracciarono movimenti ispirati ad antiche purezze.

Tanti (i più) ne uscirono, più o meno indenni, ma di molti non ho più notizia.

Io ero immune, non per meditata convinzione ma per epidermico pregiudizio, e tale sono rimasto per i sessanta (e più) anni della mia esistenza e, spero, per quello che ne rimane.

L'unica volta che ebbi un incontro ravvicinato con uno dei portatori della sapienza ancestrale, fu verso la metà degli anni 70 dello scorso secolo. Era estate e faceva caldo, se non ricordo male era giugno (o forse luglio) del '75. Me ne tornavo a casa dall'università e avevo una cartella pesante, piena di articoli, che avevo fotocopiato al dipartimento di Fisica. Mi era stato assegnato da poco l'argomento della tesi di laurea e dovevo documentarmi. Mi avevano fatto pagare le fotocopie e, non avendo più i soldi per l'autobus, me ne ero tornato a piedi.

Ho sottolineato questo punto non perché voglia accreditare l'immagine dello studente diligente con difficoltà finanziarie, che in realtà non avevo, ma solo per comunicare che la spesa, inaspettata, mi aveva obbligato a spostarmi sotto il sole cocente di Roma, trascinando un pacco pesante e che, pertanto, il mio umore non era dei migliori. Giunto, non lontano da casa, in piazza San Giovanni, allagata da una luce splendida malgrado il caldo insostenibile, mi ero buttato su una panchina per riprendere fiato.

Avevo messo il naso sulle carte per fare il punto della situazione, quando un ragazzo della mia età, venti anni o poco più, vestito di un saio bianco con una sacca a tracolla, come quella dei bonzi, mi si era avvicinato e mi aveva chiesto, con un marcato accento americano, cosa stessi facendo. Il caldo, la preoccupazione per quello che avrei dovuto fare, i miei naturali pregiudizi e tutto il resto non mi avevano messo nella migliore delle disposizioni d'animo e lo invitai a badare agli affari suoi.

Il ragazzo non si scompose e mi disse che ero così sgarbato solo perché ero un materialista e che lo studio dei neutroni e dei protoni non mi avrebbe reso migliore. Evidentemente aveva sbirciato sui miei fogli.

Mi augurò che la verità, quella degli antichi testi vedici, potesse illuminarmi e dopo avermi asperso con incenso profumato si allontanò con calma.

Tutto qui!!!

E' solo un episodio, che non lasciò alcuna traccia, se non quell'aggettivo: *vedico*.

Gli anni trascorsero e feci un mestiere che aveva a che fare con i numeri e le astrazioni della matematica, imparai a sezionare formule e concetti e intravidi una sorta di spirito, quasi magico, che ispirava o forse guidava le intuizioni dei Grandi Matematici. I *matemagici* appartengono ad una categoria privilegiata e a volte in conflitto con i matematici stessi, Euler, Ramanujan, Feynman, Bernouilli, Heaviside, Riemann, Glaishar, Burchnall …hanno aperto filoni nuovi di ricchezza ed eleganza ineguagliabili. Ho assistito però, con mio grande disappunto, alla nascita di tendenze neo platoniche alla ricerca di "numeri guida", ad una mai sopita esigenza alchemica, che, sebbene non dichiarata, sembra occupare i sogni di tanti scienziati.

Ho incontrato un compagno di viaggio allucinato (e questo va bene) ma anche ingegnere (e questo va molto meno bene) che mi aiuterà a dire di questo e di altro.

Qualche anno fa mi trovavo in India, mi avevano invitato per una conferenza, e un mio amico, il Prof. Vivek Asgekar decano dell'università di Pune, mi regalò un libro dal titolo "Vedic Mathematics".

"Vedic"-"Magic"!.. e il cerchio si chiudeva. L'antico auspicio sembrava doversi avverare tramite quella lettura.

Così non è stato.

Eppure qualcosa è emerso, la lettura è stata interessante, ho imparato che "Veda" vuole dire "Verità" e mi sono divertito tanto e, "damn math.", io e il mio amico ingegnere proveremo a spiegare perché.

Capitolo I

Aritmetica e geometria

1 Introduzione

Giuseppe Dattoli, uno degli autori di questo libro, è un fisico che ha lavorato, per quasi quaranta anni, sulla fisica dei laser e degli acceleratori. E' anche piuttosto orientato verso la matematica ed è un esperto della teoria degli operatori e delle funzioni speciali.
Non è un esperto di tutto quello che concerne il resto.
Marcello Artioli è un ingegnere che da sempre lavora con l'informatica e che coltiva l'interesse per l'epistemologia e in senso più ristretto per la filosofia della scienza. Ma purtroppo non è un esperto nemmeno di quelle.
Si può dire che entrambi risultano essere sufficientemente informati dei fatti, concernenti la Fisica, nei suoi aspetti generali e la Matematica, anche per ciò che concerne il suo sviluppo storico.
La loro competenza in Filosofia è appena sufficiente a sostenere un discorso di ragionevole livello culturale, ma è particolarmente inadeguata se si parla di dottrine orientali. Non sono pertanto esperti di dottrina vedica, nemmeno superficialmente.
E' necessario premettere tale chiarimento perché l'unico incontro con tale argomento è stato originato dall'episodio tratteggiato nella prefazione e dalla lettura di un libro intitolato "Vedic Mathematics" (Motilal Banarsidass Publishers, Private Limited. Delhi, 2003). In verità non è stato facile nemmeno capire bene chi sia l'Autore ma a quanto pare il testo è basato sul lavoro di Sua Santità Jagaduru Sankaracarya Sri Bharati Krsna Thithaji Mahaaraja dal titolo

"Sedici Semplici Formule Matematiche derivate dalla dottrina Vedica"

La trascrizione del nome è una translitterazione dal Sanscrito ed è inevitabilmente approssimata e non è stata riportata correttamente, per palese incompetenza, con gli accenti giusti e le altre notazioni fonetiche.
Le translitterazioni sono un argomento perverso e un illustre matematico P. J. Davis nel suo libro "The thread: a mathematical yarn" ha narrato una sorta di viaggio surreale tra cultura, ironia e matematica che prendeva le mosse dalla translitterazione dal cirillico del nome del matematico russo (Пафнумтий Львомвич Чебышёв) translitterato in Chebychev Chebysheff, Chebyshov, Tschebyshev, Tchebycheff, o Tschebyscheff. Attorno alle forme translitterate era nata una sorta di scuola di pensiero e i vari esponenti ne avevano fatta una religione. Tutto ciò all'insaputa di Davis, che fu uno dei primi ad utilizzare le tecniche di interpolazione di Чебышёв per i programmi di grafica della Calcomb. Nella presentazione del suo lavoro utilizzò una delle forme (non ricordiamo quale) di translitterazione.
Apriti Cielo!!!
Questo libro prende lo spunto dalla matematica Vedica per fare un giro intorno a certi aspetti della matematica di solito non trattati nei corsi universitari. E' un tour tra il faceto e il serio e non sempre elementare. Se volessimo fare un confronto con la terminologia alpinistica potremmo riferirci ad un IV grado, il cui livello di difficoltà è sinteticamente espresso come segue

"Sono presenti pochi appigli ed appoggi e inizia ad essere richiesta una buona conoscenza delle tecniche di arrampicata ed un allenamento specifico"

Fuor di metafora è richiesta la conoscenza del calcolo (derivate, integrali, serie…) e una buona disposizione "a far di conto", cercheremo ove possibile di rendere il discorso auto-consistente, ma non aspettatevi miracoli.

2 Teoremi di Pitagora e di Euclide

Le dottrine matematiche indiane, come pure quelle Assiro-Babilonesi, hanno un indubbio fascino culturale, perché non sembrano costituire un corpo a sé, costruito su assiomi e teoremi (come nella tradizione greca), ma nascono come una serie di intuizioni da introdurre ad hoc nell'ambito di una necessità specifica.
Il teorema di Pitagora, così come presentato negli *Elementi di Euclide*, ha una lunga gestazione e viene introdotto dopo lo studio delle proprietà dei triangoli, dei teoremi di Euclide… Gli Indiani lo concepirono in una forma ibrida (orripilante per i Greci) ma efficace da un punto di vista pratico.
Con riferimento alla figura seguente notiamo ad esempio che la superficie del quadrato interno (S_{int}) è legata a quella del quadrato esterno (S_{est}) da

$$S_{\text{int}} = S_{\text{est}} - 4\, S_t$$

dove S_t rappresenta l'area di ciascuno dei traingoli di lati a e b; essendo

$$S_{\text{est}} = (a + b)^2$$

$S_{\text{int}} = c^2$

$S_t = \frac{a\,b}{2}$

segue che

$c^2 = (a+b)^2 - 4\left(\frac{a\,b}{2}\right)$

ovvero

$c^2 = a^2 + b^2$

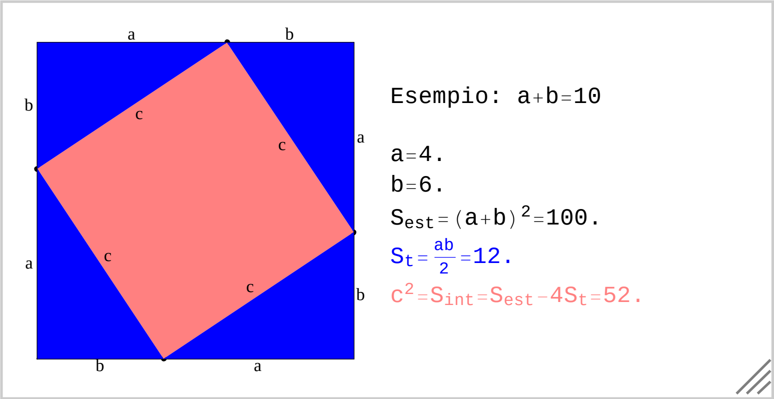


Fig. 1: teorema di Pitagora.

Un Bourbakista Euclideo avrebbe ben ragione di obiettare, perché le regole del gioco non sono state rispettate. Abbiamo infatti dimenticato di dimostrare che i quattro triangoli di lati *a, b* sono uguali, non abbiamo tenuto conto che l'utilizzo dell'algebra in una dimostrazione geometrica è contraria allo spirito della stessa…
Nonostante le scorciatoie il metodo è indubbiamente efficace e forse fu proprio tale intuizione che portò Pitagora a formularlo nel VI secolo AC, sebbene fosse già noto agli Assiri e agli Indiani. Potremmo approfittare di tale procedura per dedurre i teoremi di Euclide.
Tracciando l'altezza relativa al lato *c* di uno dei triangoli interni al quadrato e chiamando *p* e *q=c-p* le proiezioni dei cateti *a* e *b* (si veda la figura successiva) sulla ipotenusa otterremmo che

$h^2 + p^2 = a^2$

$h^2 + (c-p)^2 = b^2$

come conseguenza del fatto che i triangoli di lati *(h, a, p)* ,*(h, b, P)* sono rettangoli. Sottraendo "membro a membro" le due uguaglianze precedenti arriveremo al seguente risultato

$2\,c\,p - c^2 = a^2 - b^2$

Che, combinato con il teorema di Pitagora, fornisce le seguenti relazioni

$c\,p = a^2$

$c\,q = b^2$

Inoltre combinando le relazioni precedenti concludiamo anche che

$h^2 = a^2 - p^2 = (c-p)\,p$

Ovvero

$h^2 = p\,q$

il cui significato geometrico viene mostrato in figura.

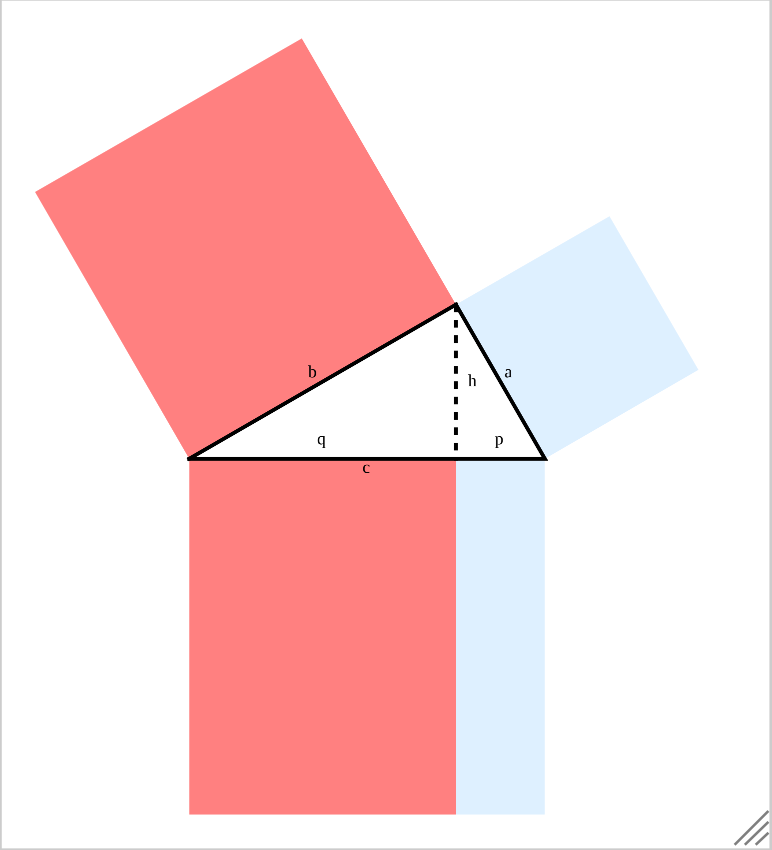


Fig. 2: teoremi di Euclide.

Abbiamo dunque capovolto il punto di vista espresso dalla matematica greca secondo cui il teorema di Pitagora dovesse essere dedotto da quelli di Euclide.

Gli antichi greci avevano tante idiosincrasie e riguardo alla geometria fissarono regole precise, che determinarono poi la genesi dei grandi quesiti che durarono per millenni. Le costruzioni geometriche, per i Greci, ammettevano solo due strumenti: la riga e il compasso. Il problema della quadratura del cerchio, che portò alla definizione dei numeri trascendenti oltre a quelli irrazionali fu una delle conseguenze di questa regola.

3 Numeri e Geometria

Gli antichi Egizi conoscevano il teorema di Pitagora prima di Pitagora stesso e ne avevano fatto uno strumento tecnologico, illustrato nella figura seguente: una cordicella veniva divisa da 12 nodi equidistanti in modo da formare tre gruppi consecutivi di 3, 4 e 5. Tale terna costituisce la cosiddetta terna egiziana e poiché

$3^2 + 4^2 = 5^2$

i nodi marcano i lati di un triangolo rettangolo e dunque possono essere utilizzati per “squadrare” blocchi di pietra.

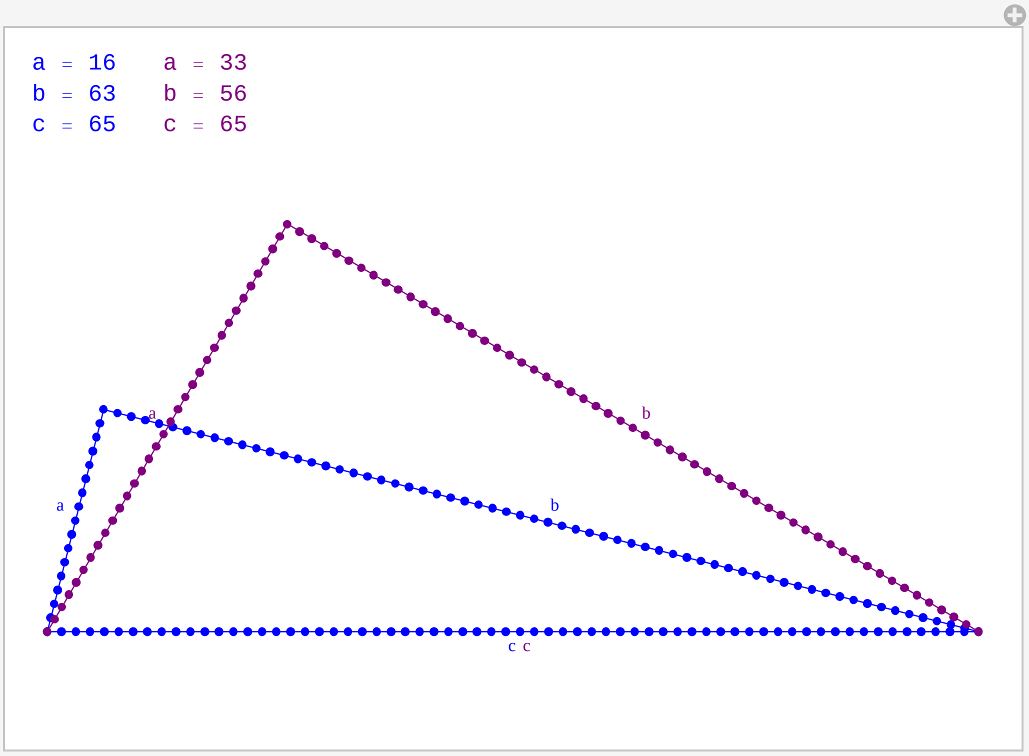


Fig. 3: terne pitagoriche.

Gli Assiro-Babilonesi erano andati oltre: una concreta prova delle loro conoscenze è codificata nei loro testi su tavolette d'argilla (si veda la figura seguente). Documenti databili tra il 2000 e 1500 A. C. testimoniano che conoscevano le proprietà delle corde, il volume della piramide e il teorema di Pitagora.

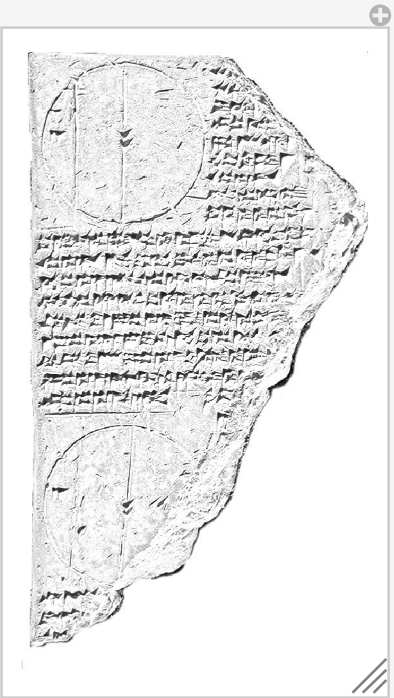


Fig. 4: ricalco di una tavoletta babilonese.

Riguardo a quest'ultimo avevano "tabelle", su tavolette di argilla, che elencavano terne pitagoriche, ovvero tre numeri interi che soddisfacessero il teorema di Pitagora. L'intento pratico giustificava ampiamente lo sforzo. Oggi non ne avremmo bisogno, ma potremmo altresì chiederci cosa lega la terna egizia ad altre, come quelle qui di seguito riportate

(3, 4, 5)
(5, 12, 13)
(7, 8, 15)
(7, 24, 25)
(12, 35, 37)
(15, 36, 39)

Per capire tale legame scriviamo la nostra terna fondamentale come un vettore

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e poniamoci il problema di cercare una opportuna trasformazione che agendo sul vettore “restituisca” una nuova terna pitagorica, ad esempio

$$L\,\epsilon = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Saltando i vari aspetti, non del tutto banali, della ricerca della soluzione è possibile provare che tale trasformazione esiste e che è esprimibile in termini di una matrice, data da

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Possiamo addirittura fare di meglio, provando che le ulteriori matrici

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

trasformano una terna pitagorica in un’altra

$$U\,\epsilon = \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}, R\,\epsilon = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Le matrici precedenti si chiamano Matrici di Hall, furono introdotte all’inizio degli anni ‘70 dello scorso secolo e costituiscono un risultato non banale, che dimostra come un problema vecchio di svariate migliaia di anni abbia continuato a suscitare interesse (e non solo storico) fino ad epoche recenti.

■ 4 Equazioni algebriche e Geometria

L’avversione dei greci per tutto quello che non fosse costruibile con riga e compasso è ben nota. Pur riconoscendo che un numero irrazionale, come $\sqrt{2}$, poteva essere costruito come illustrato nella figura seguente, mal digerirono la sua irrazionalità: una macchia nell’universo pitagorico, un segreto, nel circolo degli iniziati, la cui diffusione era punita con la morte.
La costruzione in questione implica una procedura piuttosto semplice:

1. si definisca un asse orientato, che diremo retta dei numeri e si fissi su questa un punto A che disti 1 dall’origine O;
2. si costruisca un segmento BA di lunghezza 1, perpendicolare alla retta in A;
3. si determini la lunghezza del segmento OB, che sappiamo essere $\sqrt{2}$ come conseguenza del teorema di Pitagora;
4. si riporti, tramite una semplice rotazione eseguita con un compasso puntato in O, il punto B sull’asse, determinando in tal modo la sua posizione rispetto alla retta dei numeri;
5. in tal modo il numero irrazionale $\sqrt{2}$ è stato “costruito” per via geometrica.

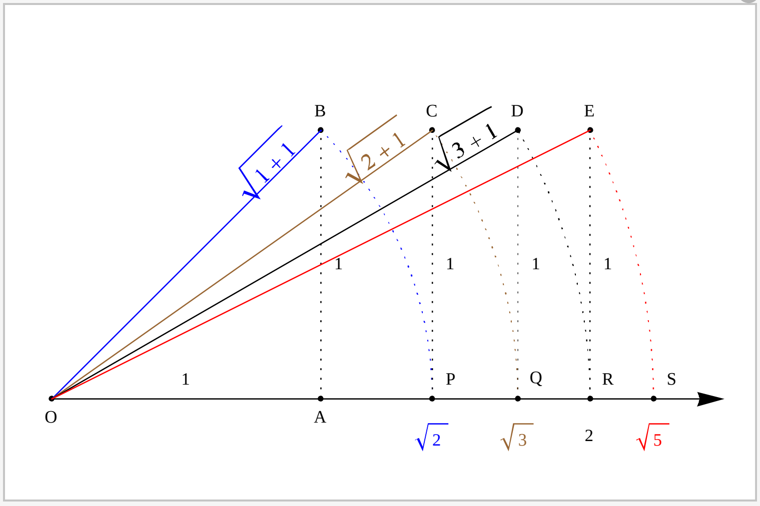


Fig. 5: costruzione geometrica di alcuni numeri irrazionali.

La semplice procedura appena illustrata ci offre la possibilità di visualizzare, geometricamente, una equazione di secondo grado.

Facendo riferimento alla figura successiva seguiamo le indicazioni riportate nel seguito:

1. si costruisca un segmento, delimitato dagli estremi A, B;
2. si costruisca un segmento disposto perpendicolarmente ad AB in uno degli estremi, diciamo A, e si indichi l'estremo superiore con C;
3. si costruisca un semicerchio di diametro pari ad AB;
4. si sposti AC, parallelamente a se stesso, all'interno del cerchio, indicando con P il punto di giacenza sulla circonferenza e H quello di giacenza sul diametro AB, di modo che AC=PH;
5. il triangolo APB è rettangolo.

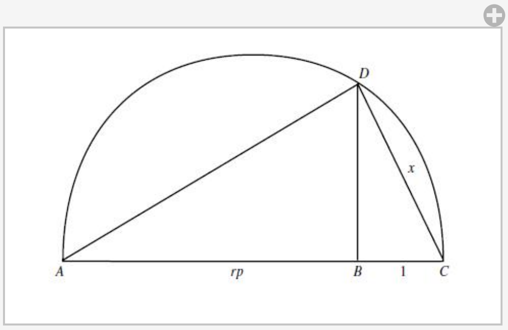


Fig. 6: riga, compasso e equazione di secondo grado.

In base al secondo teorema di Euclide avremo

$AH \cdot HB = PH^2$

Se si pone

$AH = x$
$HB = AB - x$
$AB = s$
$PH^2 = p$

si ottiene

$x^2 - s\,x = p$

che è una equazione di secondo grado, cui siamo pervenuti per via geometrica.

L'irrazionalità di $\sqrt[3]{2}$ è ancora più scandalosa e infatti tale numero non è costruibile con riga e compasso. Eppure che $\sqrt[3]{2}$ sia irrazionale è facile dimostrarlo, alla luce di quello che non sapevano i greci. Se fosse razionale, saremmo autorizzati a scrivere

$$\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$$

dove m ed n sono interi, pertanto, elevando al cubo ambo i membri dell'identità di cui sopra, concluderemmo quanto segue

$$m^3 = 2\,n^3 = n^3 + n^3$$

avremmo cioè dimostrato che esiste una "tripla" di numeri interi (m,n,p) per cui

$$m^3 = n^3 + p^3$$

in palese violazione con il teorema di Fermat (non importa se $n=p$).

Dunque tramite il procedimento di "reductio ad absurdum" abbiamo dimostrato che $\sqrt[3]{2}$ è un numero irrazionale (si utilizzi lo stesso metodo per dimostrare che $\sqrt[n]{2}$ è irrazionale).
Proviamo a fare un esercizio e chiediamoci se esista un triangolo "super-pitagorico" i cui lati soddisfino ad esempio l'identità (si veda la figura seguente)

$$a^3 + b^3 = c^3$$

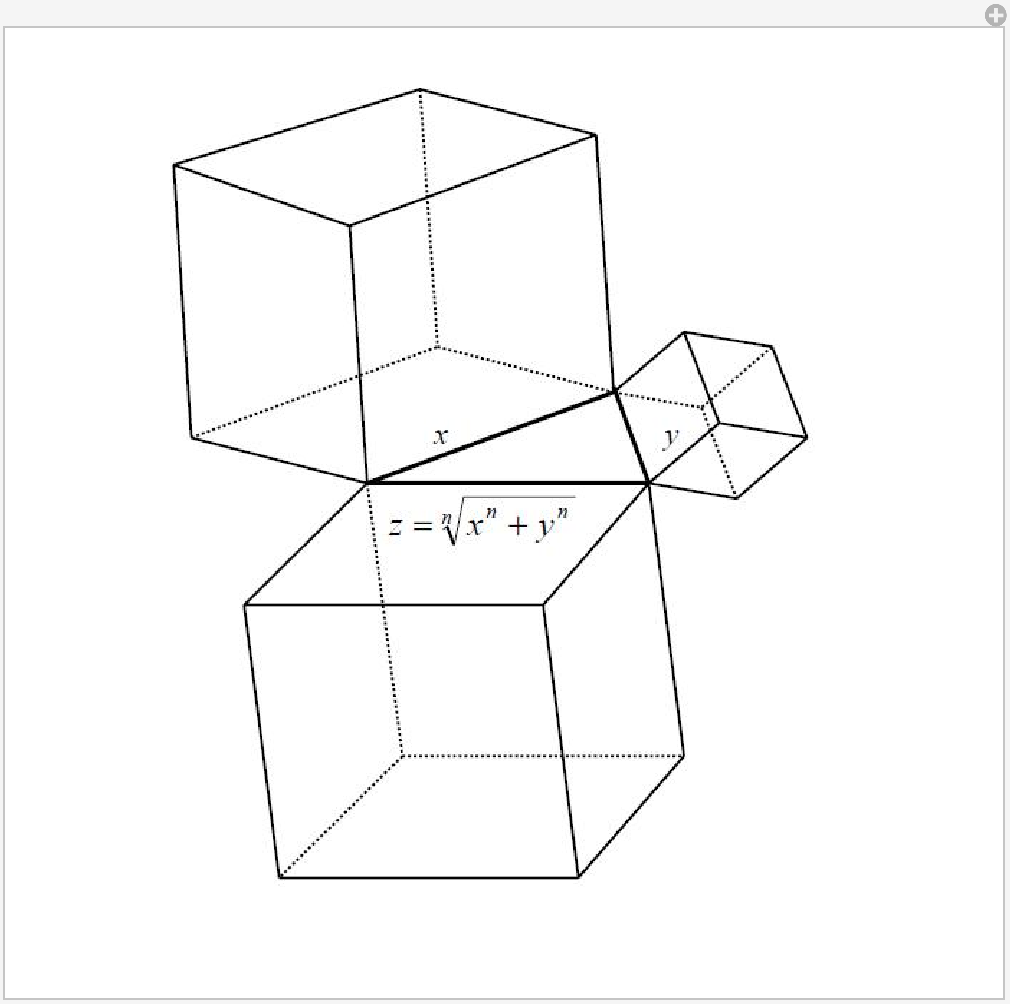


Fig. 7: teorema super−pitagorico di ordine 3.

Ricordando la regola algebrica della decomposizione della somma di due cubi

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - a\,b + b^2\right)$$

otteniamo

$$c^3 = (a + b)\left(a^2 - a\,b + b^2\right)$$

e il fatto che, seppure di natura esotica, il nostro triangolo è sempre tale e pertanto soddisfa il teorema del coseno[1]

$$c^2 = a^2 - 2\,a\,b\cos(\phi) + b^2$$

otteniamo, passando per la divisione membro a membro delle due relazioni precedenti

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a^2 - a\,b + b^2}{a^2 - 2\,a\,b\cos(\phi) + b^2}$$

Assumendo che il nostro triangolo sia isoscele, con $a = b = l$, abbiamo ovviamente

$$\frac{c}{2\,l} = \frac{l^2 - l^2 + l^2}{l^2 - 2\,l^2\cos(\phi) + l^2}$$

$$\frac{c}{2\,l} = \frac{1}{2 - 2\cos(\phi)}$$

$$\frac{c}{l} = \frac{1}{1 - \cos(\phi)}$$

Ma è anche vero che

$$l^3 + l^3 = c^3$$

$$\left(\frac{c}{l}\right)^3 = 2$$

da cui segue

$$\sqrt[3]{2} = \frac{1}{1 - \cos(\phi)}$$

Pertanto se costruiamo un triangolo isoscele di lato 1 (con un angolo al vertice di circa $\phi \cong 1.364$ rad) abbiamo automaticamente ottenuto un triangolo super-pitagorico e abbiamo costruito geometricamente il numero irrazionale $\sqrt[3]{2}$.

Problema risolto?

Evidentemente no!!!

Almeno secondo le prescrizioni degli antichi Greci.

Nella costruzione non abbiamo utilizzato né riga né compasso e abbiamo fatto dipendere tutto dalla soluzione di una equazione di terzo grado, ignota ai Greci e non risolubile con strumenti euclidei.

L'ignoranza delle equazioni algebriche superiori al secondo causò ai Greci non pochi guai.

Durante una peste che imperversava ad Atene l'oracolo di Delo sentenziò che il flagello sarebbe stato allontanato se si fosse raddoppiato il volume del tempio di Apollo, che era un cubo di lato l. Posta in termini moderni il problema dell'oracolo si riduce alla soluzione dell'equazione

$$x^3 = 2\,l^3$$

dove x è il lato del cubo, che raddoppia il volume originale. Il problema, fatalmente (è il caso di dirlo), è quello di definire la radice cubica di 2, cosa che, come abbiamo visto, non era facile per i Greci. La soluzione frustrava le migliori menti all'alba del pensiero occidentale e la peste infieriva.

Un matematico di nome Menecmo (circa 320 A. C.) propose una soluzione di natura geometrica, tramite l'utilizzo delle coniche. Proviamo a seguire un ragionamento che ci faccia intuire come il problema possa essere risolto in questi termini.

Riscriviamo la nostra equazione nella forma

$$\frac{x^2}{l} = \frac{2\,l^2}{x}$$

e poniamo

$$y = \frac{x^2}{l}$$

$$y = \frac{2\,l^2}{x}$$

L'intersezione tra la parabola e l'iperbole fornirà il valore di x cercato. Anche moltiplicando le relazioni precedenti membro a membro si ottiene un'altra parabola

$$y^2 = 2\,l\,x$$

che intersecata con una delle coniche precedenti fornirà il medesimo valore di x cercato, come mostrato in figura.

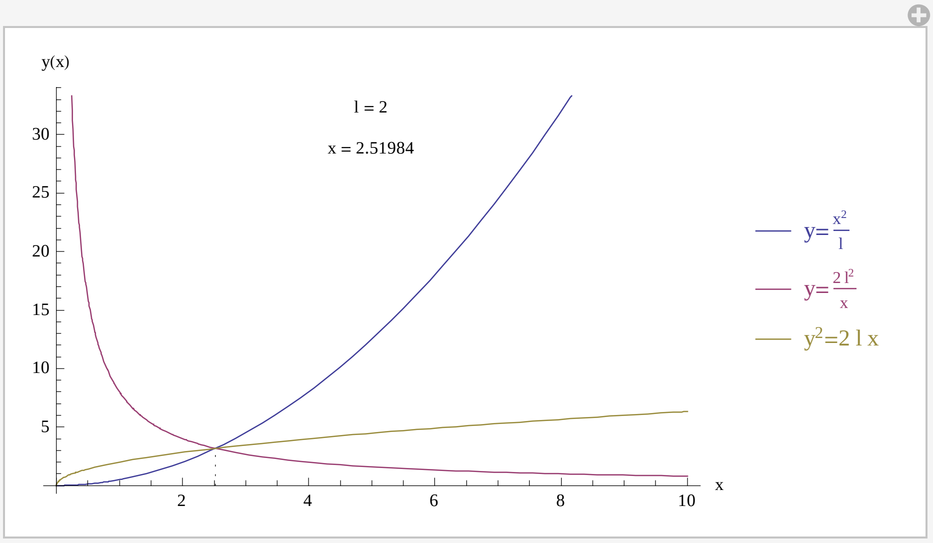


Fig. 8: soluzione di Menecmo del problema di Delo.

Il problema fu risolto, altre soluzioni proposte (una persino da Platone) non saranno qui riportate, ma le cronache non raccontano se la peste sia diminuita o no. Potremmo però azzardare una ipotesi (moderna): le malattie infettive sono descrivibili in termini del meccanismo predatore-preda, il predatore in questo caso è il bacillo della peste e la preda è l'uomo. Da un punto di vista matematico dopo un certo tempo, sufficiente lungo, il sistema (predatore-preda) raggiungono una situazione di equilibrio e la malattia recede. Se il tempo per trovare la soluzione è stato comparabile a quello "dinamico" del sistema i Greci potrebbero essersi convinti che fu la forza delle coniche a sconfiggere il male.

5 Babilonia e le equazioni di secondo grado

Visto che abbiamo citato ampiamente le equazioni di secondo grado e l'attitudine dei popoli di cultura pre-ellenica ad avere un atteggiamento più flessibile nei confronti della matematica stessa, cui guardavano con pratico disincanto, crediamo sia opportuno dire qualche cosa delle capacità algebriche dei Babilonesi, che avrebbero certamente risolto il problema di Menecno senza ricorrere alle coniche.
Riteniamo assolutamente degno di nota il fatto che la soluzione delle equazioni di secondo grado fosse nota ai Babilonesi, che ne avevano fatto uno strumento di lavoro[2].
Probabilmente i Babilonesi erano arrivati a comprendere che una equazione di secondo grado è riducibile alla soluzione di una di primo grado e alla estrazione di una radice quadrata: discuteremo il cosiddetto algoritmo babilonese per il calcolo delle radici quadrate nel prossimo capitolo.
Per poter apprezzare meglio il metodo babilonese, ricordiamo che i passi logici che portano alla soluzione di una equazione di secondo grado sono i seguenti

1. fattorizzazione del trinomio di secondo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\right)\right]$$

2. calcolo delle radici

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \left(\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_+ = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a} \\ x_- = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} \end{array} \quad \text{con } \Delta = \frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}$$

L'esempio, che riportiamo nel seguito e ritrovato su una tavoletta risalente al 4000 A. C., è presumibilmente un esercizio proposto a fini didattici, ma è estremamente istruttivo e di grande importanza per comprendere il percorso dell'evoluzione del pensiero matematico.
Il testo del problema è il seguente:

Ho sommato 7 volte il lato del mio quadrato a 11 volte la sua superficie e ho ottenuto 6.25, quanto vale il lato?

Espresso in termini moderni la soluzione del nostro problema è esprimibile in termini dell'equazione

$11\,x^2 + 7\,x = 6.25$

Non esiste alcun cenno ad una “teoria” generale di soluzione, ma solo una serie di istruzioni, che vengono riportate nel seguito.
Per un agevole confronto con la “regola moderna” si tenga conto che

$a = 11$
$b = 7$
$c = -6.25$

1. si moltiplichi $11 \cdot 6.25 = 68.75 \Longleftarrow -a\,c$

2. si calcoli $7/2 = 3.5 \Longleftarrow \frac{b}{2}$

3. se ne calcoli il quadrato $(3.5)^2 = 12.25 \Longleftarrow \frac{b^2}{4}$

4. lo si aggiunga al risultato in 1.: $22.25 + 68.75 = 81 \Longleftarrow \frac{b^2-4\,a\,c}{4}$

5. si calcoli la radice quadrata $\sqrt{81} = 9 \Longleftarrow \sqrt{\frac{b^2-4\,a\,c}{4}}$

6. si sottragga $9 - 3.5 = 5.5 \Longleftarrow \sqrt{\frac{b^2-4\,a\,c}{4}} - \frac{b}{2}$

Il ricettario termina con il seguente quesito:

7. Per cosa si deve moltiplicare 11 per ottenere 5.5? per 0.5. Allora 0.5 è il mio lato. $11 \cdot 0.5 = 5.5 \Longleftarrow \frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{b^2-4\,a\,c}{4}} - \frac{b}{2}\right) \Longleftarrow x_+ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$

Al di là del metodo risolutivo non vi è alcuna spiegazione del perché si utilizzi questa tecnica e di come questa vada inquadrata in un contesto più ampio. I Babilonesi prendevano una sola delle radici e in questo caso è naturale visto che si tratta di un problema geometrico e che una delle soluzioni è negativa. Pare che però la cosa fosse sistematica, anche quando il problema ammetteva due soluzioni positive. La cosa è presumibilmente dovuta al fatto che ignoravano che nel processo di estrazione della radice quadrata si possono avere numeri sia positivi che negativi. E’ comunque veramente stupefacente che il problema sia stato posto (e risolto, nelle sue linee essenziali) con 5000 anni di anticipo rispetto all’epoca dei grandi maestri algebristi di epoca moderna e che poi sia stato “dimenticato” per qualche millennio.

Veniamo ora a spiegare come i Babilonesi calcolavano le radici cubiche. Facciamo prima di tutto notare che disponevano di “tavole” di radici cubiche esatte, qualora il numero da cui estrarre la radice non si fosse trovato sulle tavole. Espresso in termini moderni l’algoritmo si riduce all’utilizzo della seguente identità

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\ \sqrt[3]{b}$$

avendo l’accortezza di scegliere b in maniera tale che la sua radice cubica sia nota. L’esempio tratto dalle tavolette è proprio il calcolo di 729000 che viene scritto come

$$\sqrt[3]{729\,000} = \sqrt[3]{\frac{729\,000}{27\,000}}\ \sqrt[3]{27\,000} = \sqrt[3]{27}\cdot 30 = 90$$

In questo caso lo scriba ha avuto cura di scegliere radici note, qualora non lo fossero si procedeva ad una sorta di interpolazione, come vedremo nei prossimi capitoli.
Proviamo ora a riassumere quanto detto fino ad ora, notando che abbiamo compiuto un giro, in perfetto stile Assiro-Babilonese, su quattro millenni di matematica. Nel nostro “tour” abbiamo mischiato antico e moderno, senza curarci della connessione logica e ricorrendo a nozioni (rigorosamente vere) utilizzate, per i nostri scopi, in forma “estemporanea”, ovvero non inseriti in un “corpus” coerente, come quello canonizzato negli *Elementi di Euclide*.

6 Numeri e polinomi

Sappiamo che il numero 231 espresso in base decimale si scrive

$231 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0 = \{2,\ 3,\ 1\}_{10}$

Lo stesso scrittura ma espressa in base 7 sarebbe

$\{2, 3, 1\}_7 = 2\cdot 7^2 + 3\cdot 7 + 1\cdot 7^0 = 71$

Definendo dunque una base generica p, potremmo definire il numero come un polinomio di secondo grado in p

$\{a, b, c\}_p = a\, p^2 + b\, p + c$

dove a, b, c sono tutti interi positivi minori di p. E' interessante notare che numeri del tipo $\{a^2, 2\,a, 1\}_p$ sono quadrati perfetti, a prescindere dalla base, infatti

$\{a^2, 2\,a, 1\}_p = a^2\, p^2 + 2\,a\,p + 1 = (a\,p\, + 1)^2$

o, come risulta dagli esempi che seguono

$\{1, 2, 1\}_3 = 16_{10} = (4^2)_{10}$,
$\{1, 2, 1\}_5 = 36_{10} = (6^2)_{10}$,
$\{1, 2, 1\}_{10} = 121_{10} = (11^2)_{10}$

E' anche evidente che la scomposizione del numero $\{a, b, c\}_p$, ovvero la sua riduzione in fattori (non necessariamente primi), potrebbe essere considerata come una scomposizione polinomiale, cosicché potremo scrivere

$\{a, b, c\}_p = a\,(p - n_+)\,(p - n_-)$

$n_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

La qual cosa è sempre possibile ma non necessariamente $n_\pm$ sono numeri interi e/o primi. In alcuni casi è possibile: ad esempio il numero $\{1, 4, 3\}_p$, in base 10 è 143 e risulta scomponibile nei fattori 11 e 13

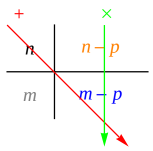
$143 = \{1, 4, 3\}_{10} = [\![1\cdot (p + 1)\,(p + 3)]\!]_{p=10} = 11 \cdot 13$

Da un punto di vista geometrico potremmo anche visualizzare $\{1, 4, 3\}_p$ come la superficie di un rettangolo di lati $(p + 1)$ e $(p + 3)$.

Abbiamo ora acquisito sufficiente indipendenza di pensiero per accedere ad una prima iniziazione dei misteri vedici discutendo un primo esempio di come vengano eseguiti alcuni prodotti tramite l'utilizzo della matematica vedica. Tralasciando i nomi del procedimento, che coinvolgono termini in sanscrito irripetibili (per chi scrive), consideriamo il prodotto di due numeri n e m a due cifre in base 10 e scegliamo una base di lavoro p. Il prodotto, cioè il risultato sarà sempre in base 10 e potrà essere eseguito come segue

$$n \times m = \begin{array}{c|c} n & n - p \\ \hline m & m - p \end{array} = n + (m - p)\,|\,(n - p)\,(m - p)$$

cioè con questa regola schematica



$n + (m - p)\,|\,(n - p) \times (m - p)$

La notazione va interpretata come segue: $n + m - p\,|\,(n - p)\,(m - p)$ è un numero, le cui prime cifre sono costituite dalla somma dei numeri n e m diminuita della base, mentre le successive dal prodotto della differenza tra i numeri da moltiplicare e la base. Le cose sono più facili a farsi che a dirsi, per cui, scegliendo come base di lavoro la stessa base dei fattori $p = 10$

$$13 \times 12 = \begin{array}{c|c} 13 & 13 - 10 \\ \hline 12 & 12 - 10 \end{array} = \begin{array}{c|c} 13 & 3 \\ \hline 12 & 2 \end{array} = 13 + 2\,|\,3 \times 2 = 15\,|\,6 = 156$$

Non è necessario lavorare in base 10, un esempio in base 100 è costituito da

$$111 \times 109 = \begin{array}{c|c} 111 & 111 - 100 \\ \hline 109 & 109 - 100 \end{array} = \begin{array}{c|c} 111 & 11 \\ \hline 109 & 9 \end{array} = 111 + 9\,|\,11 \times 9 = 120\,|\,99 = 12\,099$$

Consideriamo ora il caso $91 \cdot 96$, sempre con base di lavoro 100

$$91 \times 96 = \begin{array}{c|c} 91 & 91-100 \\ \hline 96 & 96-100 \end{array} = \begin{array}{c|c} 91 & -9 \\ \hline 96 & -4 \end{array} = 91 + (-4) \,|\, (-9)\,(-4) = 87 \,|\, 36 = 8736$$

Il segno meno è dovuto al fatto che ora i due numeri sono inferiori alla base scelta, ma seguendo la regola dei segni anche il secondo gruppo di cifre viene calcolato positivo (36).

Se si moltiplicano due numeri di cui uno è maggiore della base scelta mentre l'altro è inferiore, si può procede allo stesso modo rispettando la comune regola dei segni, ma con un aggiustamento finale come segue

$$108 \times 97 = \begin{array}{c|c} 108 & 108-100 \\ \hline 97 & 97-100 \end{array} = \begin{array}{c|c} 108 & 8 \\ \hline 97 & -3 \end{array} = 108 + (-3) \,|\, 8 \cdot (-3) = 105 \,|\, (-24) = 105 \cdot 100 - 24 = 10\,476$$

Per fugare ogni dubbio sulla persistenza della validità del metodo, consideriamo il seguente esempio con base di lavoro 10

$$21 \times 11 = \begin{array}{c|c} 21 & 11 \\ \hline 11 & 1 \end{array} = 22 \,|\, 11 = 22 + 1 \,|\, 1 = 231$$

In questo caso abbiamo tenuto conto del "riporto" sommando al numero di sinistra la prima cifra del numero di destra.
Come ulteriore esempio (in base 100) notiamo che

$$115 \times 123 = \begin{array}{c|c} 115 & 15 \\ \hline 123 & 23 \end{array} = 138 \,|\, 345 = 138 + 3 \,|\, 45 = 14\,145$$

L'operazione di elevamento al quadrato di un numero si esegue allo stesso modo, così, ad esempio avremo

$$94 \times 94 = \begin{array}{c|c} 94 & -6 \\ \hline 94 & -6 \end{array} = 88 \,|\, 36 = 8836$$

Non è difficile rendersi conto che le regole pratiche che abbiamo appena illustrate trovano la loro giustificazione nella natura polinomiale dei numeri e nel metodo algebrico della decomposizione che abbiamo discusso prima. E' altresì evidente che il metodo vedico, diventa "pratico" dopo un adeguato allenamento, invitiamo pertanto il lettore ad eseguire i seguenti esercizi

$97 \cdot 80,\ 87 \cdot 89,\ 87 \cdot 98,\ 87 \cdot 95,\ 95^2,\ 79 \cdot 96,\ 98 \cdot 96,\ 92 \cdot 99,\ 88^2,\ 97 \cdot 56,\ 97 \cdot 63,\ 92 \cdot 96$

Siccome abbiamo conseguito un adeguato livello di spregiudicatezza, consideriamo numeri del tipo

$\{a,\ b_-,\ c\}_p = a\ p^2 - b\ p + c$

in altre parole, approfittando della analogia con i polinomi, abbiamo fatto in modo da inserire un coefficiente negativo, nella definizione di un numero in una data base p. E' altresì evidente che, anche in questo caso, potremo approfittare per definire

$\{1,\ 2_-,\ 1\}_{10} = 10^2 - 2 \cdot 10 + 1 = (10-1)^2 = 9^2,$
$\{1,\ 2_-,\ 1\}_5 = 4^2,$
$\{1,\ 2_-,\ 1\}_3 = 2^2$

Potrebbe essere utile dimostrare che

$\{1,\ 2_-,\ 1\}_{13} = 12^2$

E che, dato un numero , esso sarà esprimibile come

$\{1,\ 2_-,\ 1\}_{1+N} = N^2,$
$\{1,\ 2,\ 1\}_{1-N} = N^2$

Prima di concludere questo paragrafo potremmo provare ad anticipare quanto discuteremo nei prossimi paragrafi, ovvero i cosiddetti criteri di divisibilità di un numero dato per un numero primo. Consideriamo dunque il numero

$N(p) = \{a_n,\ a_{n-1},\ ..,\ a_0\}_p = \sum_{s=0}^n a_s\ p^s$

e chiediamoci se sia divisibile per $p+1$. Visto che $N(p)$ per noi è un polinomio, la divisibilità del polinomio per $p+1$ significa, per il Teorema di Ruffini, verificare se -1 è una soluzione dell'equazione $N(p) = 0$, cosa che sarà vera se $0 = \sum_{s=0}^n (-1)^s\ a_s$. Invitiamo il lettore ad utilizzare questa regola per verificare se 132 sia divisibile per 11, oppure no, lo stesso dicasi per $\{1,\ 3,\ 2\}_4$.

In questo capitolo introduttivo abbiamo discusso gli elementi essenziali per apprezzare il metodo vedico, che sarà illustrato nei prossimi capitoli. Molti degli argomenti cui abbiamo appena accennato saranno trattati più approfonditamente nel seguito.

Capitolo II

Criteri di divisibilità, Numeri Osculatori e Radici

■ 1 Introduzione

Alla fine del capitolo precedente abbiamo messo in evidenza che, da un punto di vista concettuale, stabilire un criterio di divisibilità di un numero per un altro non è dissimile dalla ricerca delle radici di una equazione algebrica. Il problema è altresì complicato dal fatto che "le radici" debbono essere costituite da numeri interi e, nel caso della scomposizione in fattori primi, una ulteriore restrizione è implicita nella richiesta che tali interi debbano essere numeri primi.[3]

Abbiamo già evidenziato che il criterio di divisibilità per 11 è una conseguenza diretta di tale punto di vista. Possiamo utilizzare la stessa metodologia per stabilire il criterio di divisibilità di un numero per altri numeri primi (e non).

Il Teorema del Resto, di cui il Teorema di Ruffini è un corollario, prevede che il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $x + x_0$ sia pari a $P(-x_0)$. Inoltre un numero intero N è divisibile per un altro intero d quando il resto di tale divisione è zero o un multiplo di d.

Consideriamo pertanto il numero

$$N(p) = \{a_n, \ .., \ a_0\}_p$$

inteso come un polinomio in base p: la sua divisibilità per $d = p + p_0$ (cioè con $p_0 = 3$, nel caso di divisibilità per 13 in base 10) implica che il resto della divisione $N(p)/(p + p_0)$ sia multiplo di $(p + p_0)$. Tale resto viene calcolato come $N(-p_0)$, pertanto il numero

$$N(-3) = \sum_{s=0}^{n} (-3)^s \, a_s$$

deve essere un multiplo (anche negativo) di 13 per garantire la divisibilità per 13. Alcuni esempi in base 10:

$52 = \{5, 2\}_{10} \to \; N(-3) = -3 \cdot 5 + 2 = -13 \to$ divisibile
$377 = \{3, 7, 7\}_{10} \to \; N(-3) = 3^2 \cdot 3 - 3 \cdot 7 + 7 = 13 \to$ divisibile
$169 = \{1, 6, 9\}_{10} \to N(-3) = 3^2 \cdot 1 - 3 \cdot 6 + 9 = 0 \to$ divisibile
$439 = \{4, 3, 9\}_{10} \to N(-3) = 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 9 = 36 \to$ NON divisibile

I medesimi esempi in base 8 (quindi con $p_0 = 5$):

$52 = \{5, 2\}_{10} = \{6, 4\}_8 \to \; N(-5) = -5 \cdot 6 + 4 = -26 \to$ divisibile
$377 = \{3, 7, 7\}_{10} = \{5, 7, 1\}_8 \to \; N(-5) = 5^2 \cdot 5 - 5 \cdot 7 + 1 = 91 \to$ divisibile
$169 = \{1, 6, 9\}_{10} = \{2, 5, 1\}_8 \to N(-5) = 5^2 \cdot 2 - 5 \cdot 5 + 1 = 26 \to$ divisibile
$439 = \{4, 3, 9\}_{10} = \{6, 6, 7\}_8 \to N(-5) = 5^2 \cdot 6 - 5 \cdot 6 + 7 = 127 \to$ NON divisibile

Ovviamente i risultati coincidono, anche se la scelta della base incide sulla "difficoltà" di riconoscere il multiplo finale.

I criteri di divisibilità elementari possono essere a volte più "pratici" (ma non sempre), li ricorderemo pertanto nel seguito confrontandoli, con il metodo appena espresso e successivamente con quelli adottati nella matematica vedica; di seguito ricordiamo quelli "non vedici".

■ 2 Criteri di divisibilità tradizionali

■ Divisibilità per 3

Un numero è divisibile per 3 se la somma delle cifre che lo compongono è un multiplo di 3.

■ Divisibilità per 5

Un numero è divisibile per 5 se l'ultima delle sue cifre è 0 o 5.

■ Divisibilità per 7

Illustreremo il criterio di divisibilità di un numero per 7 con un esempio, stabilendo se 315 sia tale, utilizzando la seguente procedura

1. togliamo al dividendo l'ultima cifra 5, ottenendo 31 (diremo tale numero il *ridotto*);
2. sottraiamo al ridotto il doppio della cifra eliminata, ovvero 31-2×5 = 21;
3. se il numero ottenuto è 0 o un multiplo di 7, allora il numero dato è divisibile per 7.

Essendo 21 un multiplo di 7, possiamo concludere che 315 è divisibile per 7.

Consideriamo ora 3388 e procediamo come detto in precedenza:

$338 \mid 8$
$338 - 8 \times 2 = 338 - 16 = 322$

non sapendo se 322 sia divisibile per 7 applichiamo di nuovo il criterio ottenendo:

$32 \mid 2$
$32 - 2 \times 2 = 32 - 4 = 28$

quindi è divisibile per 7. La regola è dunque:

"un numero è divisibile per 7 se il numero ridotto ottenuto da quello dato escludendo la cifra dell'unità, diminuito del doppio della cifra dell'unità è 0 o un multiplo di 7."

- **Divisibilità per 13**

Il criterio è simile a quello di divisibilità per 7, secondo la regola

"un numero è divisibile per 13 se il numero ridotto ottenuto da quello dato escludendo la cifra dell'unità, aumentato del quadruplo della cifra dell'unità è un multiplo di 13."

Consideriamo come esempio il numero 169:

$16 \mid 9$
$16 + 9 \times 4 = 16 + 36 = 52$

che è un multiplo di 13.

- **Divisibilità per 17**

"un numero è divisibile per 17 se il numero ridotto ottenuto da quello dato escludendo la cifra dell'unità, aumentato di dodici volte la cifra dell'unità è un multiplo di 17."

Il lettore stabilisca se 11067 sia divisibile per 17.

A conclusione, si noti come in tutti i criteri di divisibilità sopra enunciati compaia un moltiplicatore della cifra dell'unità.

3 Un criterio di divisibilità "vedico"

- **Divisibilità per 23**

A questo punto, anche se non abbiamo capito perché, sappiamo che esiste una procedura generale. Consideriamo quindi un caso leggermente più complicato degli altri, cercando di stabilire se 13174584 sia divisibile per 23.
In merito a tale questione i testi vedici si esprimono come segue

1. si definisca l' "*osculatore*" di 23, ovvero 7 (vedremo in seguito cosa significhi);
2. si calcoli il ridotto, togliendo dal numero dato l'ultima cifra;
3. gli si sommi il prodotto dell'ultima cifra per l'osculatore medesimo, se il numero ottenuto è zero o un multiplo di 23 il numero è divisibile per 23;
4. eventualmente si ripeta la procedura finché non si arrivi ad un conclusione definitiva.

Nel "caso di specie" avremo

$1\,317\,458 \mid 4$
$1\,317\,458 + 4 \times 7 = 1\,317\,458 + 28 = 1\,317\,486$

si ripeta

$131\,748 \mid 6$
$131\,748 + 6 \times 7 = 131\,748 + 42 = 131\,790$

possiamo eliminare lo zero dal procedimento non creando nessun pregiudizio alla procedura

$1317 \mid 9$
$1317 + 9 \times 7 = 1317 + 63 = 13\,180$

$13 \mid 8$
$13 + 8 \times 7 = 13 + 56 = 69$

69 è un multiplo di 23: il procedimento è giunto alla fine e possiamo affermare che il numero di partenza è divisibile per 23.

Abbiamo, fin qui, ricordato i criteri elementari di divisibilità ed abbiamo introdotto, per il momento in maniera "empirica", un criterio di divisibilità basato sull'uso dell'osculatore (un moltiplicatore come quelli prima menzionati); vedremo, nei prossimi paragrafi come questo strumento ci permetterà di estendere la nostra abilità di "preveggenza" numerica.

4 Numeri osculatori

In geometria il cerchio osculatore è il cerchio tangente in un determinato punto ad una curva, che approssima fino al secondo ordine, è inoltre evidente che il raggio del cerchio coincide con il raggio di curvatura in quel punto, si veda la figura seguente.

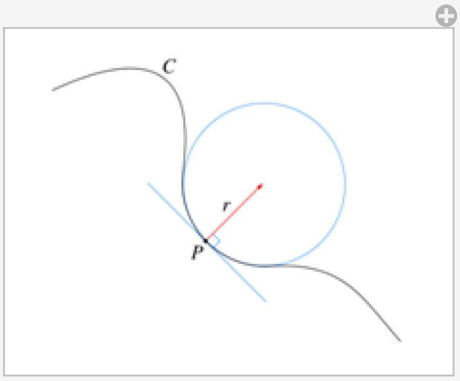


Fig. 9: cerchio osculatore di una curva.

Osculare è il termine scientifico per baciare ed effettivamente tra cerchio e curva nella figura si ravvisa quasi un bacio, molto pudico. Il sostantivo associato ad osculare dovrebbe essere osculatore e mi permetto di dire che riscrivere i versi di Rostand come

"Un osculatore, in fondo, cos' è? Un giuramento…"

perde molto del suo fascino poetico. Nella matematica vedica esistono numeri che sono osculatori di altri e, come già visto, vengono utilizzati per stabilire la divisibilità di un numero per un altro. Definiremo il metodo per la definizione di osculatore di un dato numero, indicato con $\Omega()$, secondo le regole qui di seguito esposte.

Osculatori di numeri che terminano per 9

Si elimini l'ultima cifra (cioè il 9) e si aggiunga a quanto rimane 1; il numero trovato è l'osculatore:

$\Omega(9) \rightarrow 0 + 1 = 1$

$\Omega(19) \rightarrow 1 + 1 = 2$

$\Omega(29) \rightarrow 2 + 1 = 3$

Osculatori di numeri che terminano per 7

Si moltiplichi il numero per 7, si elimini l' ultima cifra del prodotto e a quanto rimane si aggiunga 1.
Gli esempi che seguono chiariscono la procedura di calcolo:

$\Omega(7) \rightarrow 7 \times 7 = 49 \rightarrow 4 + 1 = 5$

$\Omega(17) \rightarrow 17 \times 7 = 119 \rightarrow 11 + 1 = 12$

$\Omega(37) \rightarrow 37 \times 7 = 259 \rightarrow 25 + 1 = 26$

Si noti che l'osculatore di 17 è 12 come già anticipato nel paragrafo precedente, enunciando il relativo criterio di divisibilità.

Osculatori di numeri che terminano per 3

Si moltiplichi il numero per 3, e si applichi il criterio per 9:

$\Omega(23) \rightarrow 23 \times 3 = 69 \rightarrow 6 + 1 = 7$

■ **Osculatori di numeri che terminano per 1**

Basterà moltiplicare il numero per 9 o per 3 e poi applicare uno dei criteri precedenti

$\Omega(31) \rightarrow 31 \times 3 = 93 \rightarrow 93 \times 3 = 279 \rightarrow 27 + 1 = 28$

$\Omega(41) \rightarrow 41 \times 3 = 123 \rightarrow 123 \times 3 = 369 \rightarrow 36 + 1 = 37$

■ 5 Osculatori e criteri di divisibilità convenzionali

■ **Alcuni esempi utilizzando il numero osculatore**

Gli esempi che seguono danno una idea dell'efficienza del metodo appena esposto.

Il numero 425 è divisibile per 17, infatti, essendo l'osculatore

$\Omega(17) = 12$

$425 = 42 \mid 5$

$42 + 5 \times 12 = 102 = 10 \mid 2$

$10 + 2 \times 12 = 34$

Sebbene non sia facile stabilire a priori il numero di iterazioni, le osculazioni successive portano alla fine al dividendo e quindi a valutare la divisibilità. Applicando il metodo alla divisibilità di 83521 sempre per 17, ripetutamente si ha:

$83\,521 = 8352 \mid 1$

$8352 + 1 \times 12 = 8364 = 836 \mid 4$

$836 + 4 \times 12 = 884 = 88 \mid 4$

$88 + 4 \times 12 = 136 = 13 \mid 6$

$13 + 6 \times 12 = 85 = 8 \mid 5$

$8 + 5 \times 12 = 68 = 6 \mid 8$

$6 + 8 \times 12 = 102 = 10 \mid 2$

$10 + 2 \times 12 = 34 = 3 \mid 4$

$3 + 4 \times 12 = 51 = 5 \mid 1$

$5 + 1 \times 12 = 17$

Ovviamente anche il criterio di divisibilità per 7 è facilmente inquadrabile nel contesto della tecnica degli osculatori, infatti nel criterio prima esposto compare un moltiplicatore pari a 2, infatti:

$\Omega(7) = 5$

Per provarlo con 2072, scriviamo

$2072 = 207 \mid 2$

$207 + 2 \times 5 = 217 = 21 \mid 7$

$21 + 7 \times 5 = 56 = 5 \mid 6$

$5 + 6 \times 5 = 35$

La qual cosa ci permette di stabilire che il numero dato è divisibile per 7. Proviamo ora a vedere cosa succede se continuiamo la procedura

$35 = 3 \mid 5$

$3 + 5 \times 5 = 28 = 2 \mid 8$

$2 + 8 \times 5 = 42 = 4 \mid 2$

$4 + 2 \times 5 = 14 = 1 \mid 4$

$1 + 4 \times 5 = 21 = 2 \mid 1$

$2 + 1 \times 5 = 7$

Notiamo che per la divisibilità per 7, il moltiplicatore nel caso del criterio tradizionale è 2, mentre nel caso vedico precedente è 5 ed è stato calcolato come osculatore di 7.

La procedura descritta ci ha permesso di stabilire un criterio di divisibilità, piuttosto generale, attraverso il concetto, un po' oscuro, del numero osculatore. A questo punto dovremmo riconciliare i concetti "vedici" con quelli più familiari dell'aritmetica "occidentale", ricordati nel paragrafo introduttivo e che vengono di nuovo riportati con una qualche giustificazione.

- **Criterio di divisibilità per 3**

Si consideri un numero in base 10

$N = \sum_{s=0}^{n} a_s\, 10^s$

La condizione di divisibilità per 3 prima enunciata richiede che

$\sum_{s=0}^{n} a_s = 3\, m$

da cui segue

$a_0 = 3\, m - \sum_{s=1}^{n} a_s$

Il numero potrà pertanto essere scritto come

$N = \sum_{s=1}^{n} a_s\, 10^s + 3\, m - \sum_{s=1}^{n} a_s = \sum_{s=1}^{n} a_s (10^s - 1) + 3\, m$

essendo $10^s - 1$ divisibile per 3, il criterio è dunque dimostrato (la cosa è ovvia, però onde evitare qualsiasi incomprensione notiamo che 10^2-1=99, 10^3-1=999, 10^4-1=999).

Consideriamo ora un numero in base p

$N = \sum_{s=0}^{n} a_s\, p^s$

e assumiamo che

$\sum_{s=0}^{n} a_s = K\, m$

dove K e m sono numeri interi, in base allo stesso ragionamento di prima avremo

$N = \sum_{s=1}^{n} a_s (p^s - 1) + K\, m$

Se $p^s - 1$ è un multiplo di K potremo concludere che il nostro numero è divisibile per K, cosicché se p=18 e se K=17 il numero N è divisibile per 17.

- **Criterio di divisibilità per 5**

..è ovvio e viene omesso.

- **Criterio di divisibilità per 7**

Per semplicità, considereremo il numero a tre cifre

$N = \{a_2,\, a_1,\, a_0\}_{10}$

Come sappiamo la condizione di divisibilità per 7 impone che (notando il moltiplicatore 2)

$\{a_2,\, a_1\}_{10} - 2\, a_0 = 7\, m$

da cui segue

$2\, a_0 = 10\, a_2 + a_1 - 7\, m$

Inoltre

$2\, N = 2 \cdot 10^2\, a_2 + 2 \cdot 10\, a_1 + 2\, a_0 = 2 \cdot 10^2\, a_2 + 2 \cdot 10\, a_1 + 10\, a_2 + a_1 - 7\, m = 210\, a_2 + 21\, a_1 - 7\, m = 7\,(30\, a_2 + 3\, a_1 - m)$

Il numero *2N* è per definizione divisibile per 2, la qual cosa implica che $(30\, a_2 + 3\, a_1 - m)$ sia un numero pari; la relazione precedente implica però che *2N* sia anche un multiplo di 7 e pertanto N risulta essere divisibile per 7.
L'estensione al caso con un numero arbitrario di cifre è banale e non viene riportata.

Nel paragrafo precedente abbiamo però visto che il metodo dell'osculatore presuppone una tecnica leggermente diversa, tenuto conto che l'osculatore di 7 è 5 avremo

$\{a_2,\, a_1\}_{10} + 5\, a_0 = 7\, m$

da cui segue

$5\, a_0 = -10\, a_2 - a_1 + 7\, m$

Inoltre

$5\,N = 5\cdot 10^2\,a_2 + 5\cdot 10\,a_1 + 5\,a_0 = 5\cdot 10^2\,a_2 + 5\cdot 10\,a_1 - 10\,a_2 - a_1 + 7\,m = 490\,a_2 + 49\,a_1 - 7\,m = 7\,(70\,a_2 + 7\,a_1 - m)$

Con ragionamento analogo al precedente si stabilisce la divisibilità di N per 7.

- **Criterio di divisibilità per 13**

Il lettore applichi il metodo provando la validità del criterio. Suggerimento:

$N = \{a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0\}_{10} \to 10^2\,a_3 + 10\,a_2 + a_1 + 4\,a_0 = 13\,m \to 4\,N = 39\cdot 10^2\,a_3 + 39\cdot 10\,a_2 + 39\,a_1 - 13\,m$

- **Riepilogo**

Proviamo ora a porre il problema nei seguenti termini

$N = \{a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0\}_{10} \to 10^2\,a_3 + 10\,a_2 + a_1 + \sigma\,a_0 = K\,m$

$\sigma\,N = (10\,\sigma - 1)\cdot 10^2\,a_3 + (10\,\sigma - 1)\cdot 10\,a_2 + (10\,\sigma - 1)\,a_1 - K\,m$

Messo in questi termini possiamo dire che il numero N è divisibile per K se $10\,\sigma - 1$ è un multiplo di K. Questa condizione comprende tutti i casi studiati fino ad ora e rende conto del concetto di osculatore evidenziato.

osculatore σ	1	4	5	7
divisibilità per	3	13	7	23

In questo paragrafo abbiamo evitato di utilizzare i concetti associati alla cosiddetta algebra modulare e abbiamo mantenuto un profilo molto basso, però abbastanza efficace per i nostri scopi.

6 Ulteriori esempi e notazioni diverse

I criteri di divisibilità hanno notevoli ricadute pratiche nell'ambito della sicurezza informatica e pertanto le problematiche associate sono ampiamente studiate e vari metodi di natura pratica sono stati proposti in forme non tutte omogenee dal punto di vista della notazione. Ad esempio la seguente notazione

$a : n\ ?$

viene utilizzata per porre il problema se il numero a (in base 10) sia divisibile per n; inoltre la risposta specifica viene fornita tramite i seguenti passi (ad asempio con $a = 56670$ e $n = 7$)

$56\,670 : 7\,? \to\ 5667 : 7\,? \to\ 553 : 7\,? \to\ 49 : 7$

In cui è stato applicato un algoritmo[4] basato sul primo criterio di divisibilità per 7; qualora utilizzassimo il secondo (osculatore 5) avremmo

$56\,670 : 7\,? \to\ 5667 : 7\,? \to\ 602 : 7\,? \to\ 70 : 7$

Altre procedure di uso corrente sono quelle relative ai criteri di divisibilità di un numero N per un numero del tipo $10\,p + 1$ e il problema viene posto nel modo seguente.

$N : (10\,p + 1)\ ?$

Ovviamente N può essere scritto come somma di due termini dove $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ rappresenta l'intero più grande minore o uguale ad m/n (pertanto $\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 3$, $\left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 2$, $\left\lceil \frac{7}{5} \right\rceil = 1$ ...) e u è l'unità definita in modo tale che

$N = 10 \left\lceil \frac{N}{10} \right\rceil + u$

Avremo pertanto, ad esempio:

$2257 = 10 \left\lceil \frac{2257}{10} \right\rceil + 7 \to u = 7$

Ricordiamo che se N è espresso in base 10

$N = \{a_n,\ a_{n-1},\ ..,\ a_1,\ a_0\}_{10}$

tale numero è divisibile per 11 se $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\,a_r$ è un multiplo (anche nullo) di 11.

Similmente, se invece N è espresso in base $10\,p$

$N = \{A_m,\ A_{m-1},\ ..,\ A_1,\ A_0\}_{10\,p}$

tale numero è divisibile per $10\,p + 1$ se $\sum_{r=0}^{m} (-1)^r\,A_r$ è un multiplo (anche nullo) di $10\,p + 1$

Esprimiamo quindi N anche in base $10\,p$

$N = \{A_1,\ A_0\}_{10\,p} = 10\,p\,A_1 + A_0$

che dal confronto con la precedente espressione di N dà

$A_0 = u$
$A_1 = \frac{1}{p}\left\lceil \frac{N}{10} \right\rceil$

Il criterio di divisibilità per $10\,p + 1$ prima richiamato fornisce

$(-1)\cdot\frac{1}{p}\left\lceil \frac{N}{10} \right\rceil + u = k\,(10\,p + 1)$

La divisibilità è dunque assicurata se

$u\,p - \left\lceil \frac{N}{10} \right\rceil = k\,p\,\ (10\,p + 1)$

ovvero, cambiando di segno, quando

$\left\lceil \frac{N}{10} \right\rceil - u\,p$

è un multiplo (anche nullo) di $10\,p + 1$

Per cui considerando ad esempio il problema

$2257 : 61$?

potremmo procedere come segue

$\left(10\left\lceil \frac{2257}{10} \right\rceil + 7\right) : (10\cdot 6 + 1)$?

avendo cioè determinato $u = 7$ e $p = 6$, quindi

$\left\lceil \frac{N}{10} \right\rceil - u\,p = 225 - 7\cdot 6 = 183 = 3\cdot 61$

confermando la divisibilità per 61.

■ 7 Quadrati, radici quadrate e prodotti notevoli

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come la forma polinomiale di un numero possa chiarire molto della relativa tecnologia computazionale e molto delle regole pratiche della matematica vedica ne è una diretta conseguenza. Questo vale in particolar modo per il calcolo delle potenze di un numero e per il computo delle relative radici.
Un quadrato perfetto potrà essere espresso come

$n^2 = (p + 1)^2 = p^2 + 2\,p + 1 = \{1,\ 2,\ 1\}_p = \{1,\ 2,\ 1\}_{n-1}$

Ad esempio per p=3 il quadrato è 16 e per p=10 è 121.

Un cubo perfetto invece potrà scriversi nella forma

$n^3 = (p + 1)^3 = p^3 + 3\,p^2 + 3\,p + 1 = \{1,\ 3,\ 3,\ 1\}_p = \{1,\ 3,\ 3,\ 1\}_{n-1}$

per cui se si potrà individuare una base in cui un dato numero può essere posto nella forma di cui sopra è certamente un quadrato o un cubo perfetto.

Il numero 625, pur essendo un quadrato perfetto, ha una forma diversa da quelle precedenti se in base 10

$25^2 = 625 = 6\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 5 = \{6,\ 2,\ 5\}_{10}$

però è sempre definibile una base in cui possa essere espresso nella forma “canonica” precedente

$\{1,\ 2,\ 1\}_{24} = 24^2 + 2\cdot 24 + 1 = 576 + 49 = 625$

Anche se evidente, la regola non è particolarmente pratica perché più che a definire un quadrato, la radice di un numero serve a cercare una base in cui esprimere un quadrato nella sequenza 121.

Consideriamo ora il calcolo del quadrato di un numero la cui ultima cifra sia 5

$(\{a,\ 5\}_{10})^2 = a^2\cdot 10^2 + 2\cdot 5\cdot a\cdot 10 + 25 = a(a + 1)\cdot 10^2 + 25$

Trasformiamo la precedente constatazione in una regola pratica applicata al calcolo del quadrato di 85; la regola recita come segue

“Si prenda la prima cifra (8) e la si moltiplichi per se stessa addizionata di uno (8·9 = 72); il numero cercato risulterà composto da 4 cifre di cui 72 sono le prime mentre le altre sono 25.”

ovvero

$85^2 = (\{8,\ 5\}_{10})^2 = 8\,(8+1)\cdot 10^2 + 25 = 72 \mid 25 = 7225$

Per contro potremmo concludere che la radice quadrata di un numero le cui ultime cifre sono 25, può essere determinata semplicemente capovolgendo il ragionamento precedente. Se volessimo calcolare $\sqrt{5675}$, procederemmo, dunque, secondo quanto segue

$5675 = (\{a,\ 5\}_{10})^2$

$\sqrt{5675} = \{a,\ 5\}_{10}$

$56 = a(a+1)$

$a = 7$

$\Longrightarrow \sqrt{5625} = 7 \mid 5 = 75$

E’ interessante notare che essendo a definito da una equazione di secondo grado ammette due soluzioni, infatti

$a(a+1) = m$

$a_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4m}}{2}$

pertanto la nostra radice quadrata potrà essere scritta come

$\{a_+,\ 5\}_{10} = -\{a_-,\ 5\}_{10}$

compatibilmente con il fatto che $\sqrt{N} = \pm r$.

Utilizzeremo la regola del quadrato dei numeri che terminano per 5 per imparare a fare velocemente dei prodotti. Qualora volessimo calcolare il prodotto 66×64, procederemmo come segue

$(65+1)\,(65-1) = 65^2 - 1 = 4225 - 1 = 4224$

In cui abbiamo utilizzato lo sviluppo del prodotto notevole.Pertanto applicando il processo mentalmente avremo 74×76 = 5624.

In generale avremo per il prodotto di due numeri la cui media è un numero che termina per 5

$N_+ \times N_- = a(a+1)\cdot 10^2 + \left(25 - r^2\right)$

$N_{\pm} = \{a,\ 5 \pm r\}_{10},\ \ p \le 5$

Pertanto 72×78 = 5616 perché

$N_{\pm} = \{a,\ 5 \pm r\}_{10} = \{7,\ 5 \pm 3\} \Longrightarrow N_+ \times N_- = 7\,(7+1)\cdot 10^2 + \left(25 - 3^2\right) = 56 \mid 16 = 5616$

Cerchiamo ora di trarre beneficio da quanto appreso per estendere il metodo tramite l’utilizzo di altre basi.

E’ evidente che in generale, se $p = 2\,k$

$\left(\{a,\ k\}_p\right)^2 = ((2\,a+1)\,k)^2$

pertanto il quadrato di 77, che in base 14 si scrive come $\{5,\ 7\}_{14}$, potrà essere calcolato secondo la relazione

$(\{5,\ 7\}_{14})^2 = 30\cdot 14^2 + 49 = 5229$.

In generale potremo scrivere la seguente relazione

$(\{a,\ n\}_{2n})^2 = a(a+1)\cdot(2\,n)^2 + n^2 = \left\{a(a+1),\ n^2\right\}_{(2n)^2}$

La regola appena esposta è comunque poco pratica dal punto di vista computazionale e nel seguito discuteremo metodi di sicuro più efficienti.

Approfittiamo ancora dei prodotti notevoli per acquisire ulteriore “tecnologia computazionale”. Partiamo dalla identità

$a^2 = (a+b)\,(a-b) + b^2$

per calcolare il quadrato di 92

$92^2 = (92 + 8)(92 - 8) + 8^2 = 100 \cdot 84 + 64 = 84 \cdot 10^2 + 64 = 84 \mid 64 = 8464$

La regola che abbiamo applicato è ovvia: il quadrato di un numero N tra 91 e 99 è un numero a 4 cifre, le ultime due sono date dal quadrato della differenza Δ tra cento e il numero stesso, mentre le prime due dalla differenza tra il numero e Δ, ovvero

$N^2 = N - \Delta \mid \Delta^2$.

Le cose sono più facili a farsi che a dirsi, infatti

$93^2 = 86 \mid 49$
$94^2 = 88 \mid 36$
$97^2 = 94 \mid 09$
$98^2 = 96 \mid 04$

Da tale regola potremmo stabilire quanto segue: la radice quadrata di un numero a quattro cifre le cui ultime due sono costituite da un quadrato perfetto potrebbe essere data da

$$\sqrt{a \mid b \mid c \mid d} = (a \mid b) + \sqrt{c \mid d}$$

infatti

$\sqrt{8836} = 88 + \sqrt{36} = 94$
$\sqrt{9604} = 96 + \sqrt{04} = 98$

Consideriamo ora numeri che non siano molto prossimi a 100 calcolando i seguenti quadrati

$87^2 = (87 + 13)(87 - 13) + 13^2 = 100 \cdot 74 + 169 = 100 \cdot 74 + (100 + 69) = 74 + 1 \mid 69 = 75 \mid 69$
$89^2 = (89 + 11)(89 - 11) + 11^2 = 100 \cdot 78 + 121 = 100 \cdot 78 + (100 + 21) = 78 + 1 \mid 21 = 79 \mid 21$
$74^2 = (74 + 26)(74 - 26) + 26^2 = 100 \cdot 48 + 676 = 100 \cdot 48 + (6 \cdot 100 + 76) = 48 + 6 \mid 76 = 54 \mid 76$

Da un punto di vista concettuale, queste espressioni sono basate sullo stesso criterio esposto in precedenza. Vediamo ora di trarre anche da queste relazioni un metodo per estrarre la radice quadrata di un numero.
Invertiamo allora la precedente procedura, calcolando la radice quadrata di 7569 secondo le indicazioni che seguono

1. separiamo le prime due cifre dalle seconde, ovvero $75 \mid 69$;

2. troviamo la cifra che preposta al secondo gruppo lo rende un quadrato perfetto di tre cifre, ovvero $1 \mid 69 = 169 = 13^2$

3. sottraiamo tale cifra al primo gruppo e lo preponiamo al secondo, ovvero $75 - 1 \mid 169 = 74 \mid 13^2$;

4. sommiamo il primo gruppo alla radice del secondo per ottenere la radice cercata, ovvero $74 + 13 = 87$.

Si provi ora con alcuni esempi

$\sqrt{6889} \rightarrow 68 \mid 89 \rightarrow 68 - 2 \mid 289 \rightarrow 66 \mid 17^2 \rightarrow 66 + 17 = 83$

$\sqrt{6724} \rightarrow 67 \mid 24 \rightarrow 67 - 3 \mid 324 \rightarrow 64 \mid 18^2 \rightarrow 64 + 18 = 82$

In questo paragrafo abbiamo cominciato a porre il problema della ricerca delle radici quadrate di un numero, ci siamo però limitati a radici di quadrati perfetti e cercheremo di generalizzare i criteri appena esposti nei prossimi paragrafi. Dedicheremo la sezione conclusiva di questo Capitolo a ulteriori metodi pratici di calcolo, complementari a quelli discussi fino ad ora.

■ 8 Vargamula[5]

L'abilità di calcolare una radice quadrata o disporre di tavole di calcolo appartiene ad un passato veramente lontano. Ora non ce ne è più bisogno: ogni calcolatrice da tasca è in grado di eseguire il problema in tempi certamente più rapidi di quelli necessari ad un operatore umano ed è sicuramente molto più comoda di un ingombrante prontuario di tavole e più semplice da utilizzare del "regolo". Ciononostante è deludente che praticamente nessuno conosca i vecchi metodi di calcolo e che non si sappia come faccia la calcolatrice ad eseguire l'operazione di estrazione di una radice.
Prima di ricordare regole vetuste, appartenenti alla tecnologia di calcolo occidentale, e quelle meno note del ricettario vedico, ricordiamo gli elementi che caratterizzano un quadrato perfetto

1. la somma delle cifre che lo compongono può essere soltanto 1, 4, 7, 9;

2. l'ultima delle sue cifre è 1, 4, 5, 6, 9, 0;

3. è la somma dei numeri primi dispari secondo la regola $N^2 = \sum_{n=0}^{N-1}(2\,n + 1)$;

4. se il numero dato consta di *n* cifre, la sua radice quadrata sarà composta da *n/2* o *(n+1)/2* cifre.

```
E' un quadrato perfetto    100

1. somma delle cifre       1
2. ultima cifra            0
3. somma di numeri dispari {1, 3, 5, .., 17, 19}
4. 100 di 3 cifre          radice 10 di 2 cifre
```

Fig. 10: quadrato perfetto.

E' bene notare che le condizioni 1) e 2) sono **necessarie ma non sufficienti**, la qual cosa significa che tutti i quadrati perfetti soddisfano tali requisiti, ma non tutti i numeri che verificano tali condizioni sono quadrati perfetti, ad esempio 139 non è un quadrato perfetto. Il numero 1849 (che termina per 9 e la somma delle cifre[6] è 4) potrebbe essere un quadrato perfetto, con una radice quadrata costituita da un numero a due cifre.
Per il relativo calcolo procederemo come segue:

1. si disegni una tabella con sei colonne e cinque righe e si disponga il radicando come illustrato nel seguito;

2. si determini il più grande quadrato minore o uguale al numero formato dalle prime due cifre del radicando, ovvero 16, e lo si disponga sotto le prime due cifre del radicando;

3. si riporti la radice di tale quadrato, ovvero 4, nell'ultima colonna della medesima riga;

4. si calcoli la differenza tra il numero delle prime due cifre e tale quadrato, ovvero 18 – 16 = 2 e lo si riporti alla riga successiva;

5. in corrispondenza si abbassi la terza cifra del radicando a formare un nuovo numero, ovvero 24;

6. in corrispondenza, nella penultima colonna, si riporti una delle cifre del radicando (ad esempio 8);

7. si divida tale nuovo numero per questa cifra, ovvero 24 per 8, e si ponga il quoziente nella quarta riga in ultima colonna;

8. si faccia la differenza tra il quadrato di 3 e l'ultima cifra, essendo zero il calcolo termina e la radice cercata è 43.

$\sqrt{1849}$ →

1	8	4	9		
1	6				4
	2	4		8	
			9		3
			0		

→ $\sqrt{1849} = 43$

Proviamo a scegliere una cifra diversa

$\sqrt{1849}$ →

1	8	4	9		
1	6				4
	2	4		9	
			9		2
			5		

→ $\sqrt{1849} \neq 42$

Evidentemente la procedura non funzione per tutte le cifre componenti il numero di cui si desidera trovare il radicando e certe volte non funziona affatto!!!

Riteniamo opportuno fare un cenno a metodi approssimati per il calcolo della radice quadrata di un numero *R*. Uno di tali metodi, noto sin dall'antichità, è quello di Erone (detto anche algoritmo babilonese)[7], che può essere riassunto dalla seguente formula "iterativa"

$$r_{k+1} = \frac{1}{2}\left(r_k + \frac{R}{r_k}\right)$$

Per procedura iterativa si intende la ricerca di un risultato per approssimazioni successive, nel caso in questione si procede scegliendo un valore iniziale r_0, che è una qualsiasi approssimazione della radice di R e i termini successivi, calcolati a partire da questa, costituiscono approssimazioni migliori di quella originale.

Ad esempio se $R = 30$ assumiamo $r_0 = 5$ per cui

$r_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{30}{5}\right) = 5.5$

$r_2 = \frac{1}{2}\left(5.5 + \frac{30}{5.5}\right) \cong 5.47727272$

...

$r_{10} \cong 5.477225575051661$

Bisogna notare che il numero di iterazioni successive per ottenere precisione accurata dipende dalla “bontà” dell’approssimazione iniziale.
Se ci si accontenta delle prime 6 cifre decimali la convergenza è comunque assicurata in poche iterazioni (4 o 5) anche se la scelta iniziale è assolutamente lontana dalla radice del numero dato. Nella figura seguente riportiamo le iterazioni successive per il calcolo di una radice partendo da due valori iniziali diversi tra loro e molto lontani dal valore "asintotico"[8] che rappresenta l’approssimazione cercata.
Ad esempio per il calcolo $\sqrt{12\,480}$, 8 iterazioni sono sufficienti per ottenere una approssimazione alla 15-esima cifra decimale, partendo da valori iniziali significativamente diversi dal valore della radice.

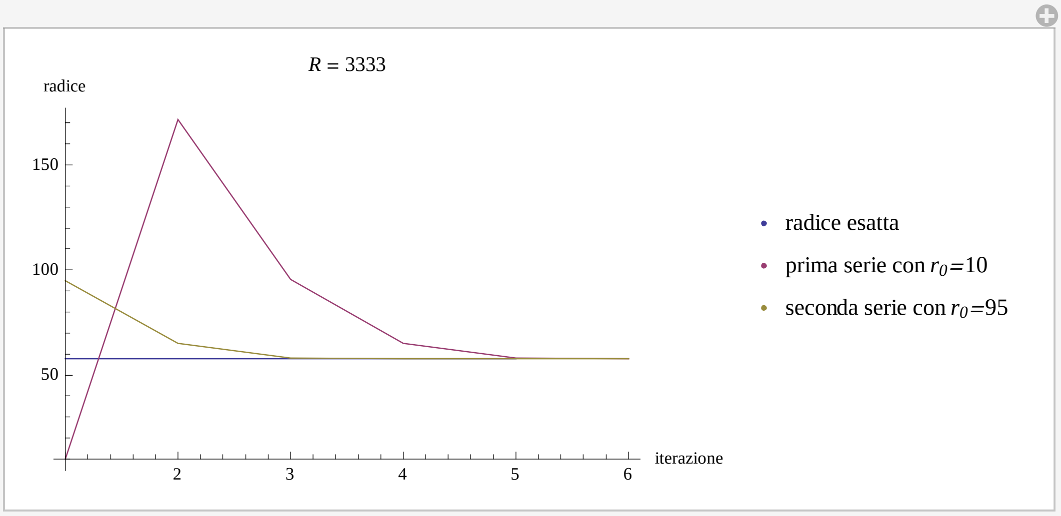


Fig. 11: estrazione della radice per iterazione (metodo babilonese o di Erone).

Il metodo babilonese è in realtà un caso particolare di quello di Newton, essendo ques’ultimo una ricerca della radice quadrata r mediante la ricerca degli zeri di una funzione attraverso la serie

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Infatti con $f(x) = x^2 - r$, si ha $f'(x) = 2\,x$, quindi

$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^2 - r}{2\,x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{r}{2\,x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{r}{2\,x_n}$

cioè

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{r}{x_n}\right)$

come per il metodo babilonese.

Consideriamo ora la seguente equazione di secondo grado

$x^2 - x = N$

la cui soluzione positiva è

$x_+ = \frac{1+\sqrt{1+4\,N}}{2}$

Se riscriviamo la precedente equazione nella forma

$x = 1 + \frac{N}{x}$

ci rendiamo conto che potremmo utilizzare un metodo iterativo, analogo a quello di Erone, per ottenere le soluzioni in forma algoritmica, ovvero

$x_{n+1} = 1 + \frac{N}{x_n}$

Nella figura seguente mostriamo la soluzione “asintotica” per $N = 5$ ottenuta partendo da un valore di prova pari a 5: l’iterazione converge a 2.791 che è quella ottenibile tramite la soluzione ordinaria.

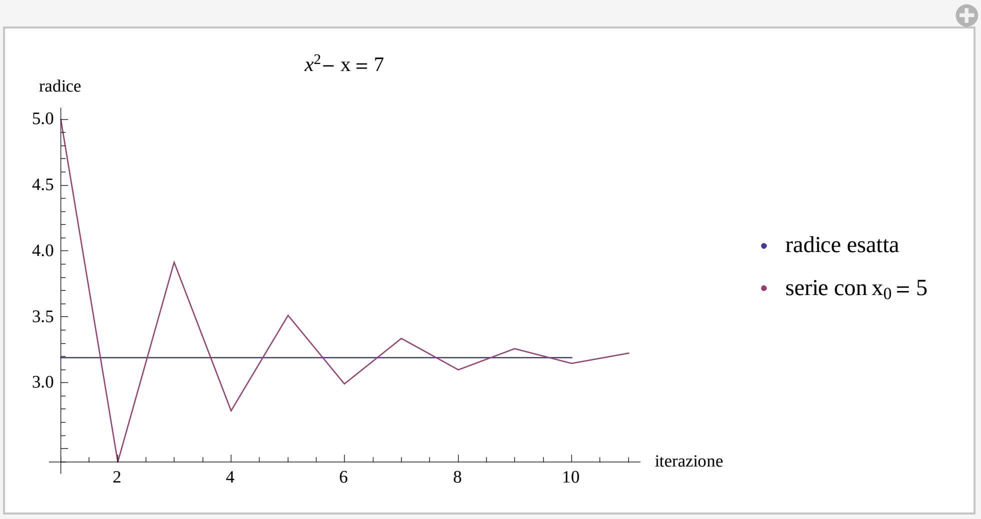


Fig. 12: equazione di secondo grado risolta per iterazione.

E’ evidente che possiamo sfruttare il risultato precedente per proporre un ulteriore metodo per l’approssimazione della radice quadrata di un numero R, che in forma iterativa può essere espressa come

$\sqrt{R_n} \cong 1 + \frac{R-1}{2 x_n}$

$x_{n+1} = 1 + \frac{R-1}{4 x_n}$

la relativa derivazione pur essendo una conseguenza pressoché immediata delle relazioni precedenti viene suggerita come utile esercizio.

E’ inoltre interessante utilizzare il metodo di Erone alla seconda iterazione per mostrare che

$\sqrt{R} \cong \frac{(N^2+R)^2+4N^2R}{4N(N^2+R)}$

dove N è l’intero il cui quadrato è più vicino ad R. L’accuratezza dell’approssimazione dipende da quanto N^2 sia prossimo ad R, ad esempio se $N = 5$ e $R = 35$ il calcolo fornisce $\sqrt{35}$ con una approssimazione dell’ordine di $7 \cdot 10^{-5}$, mentre per $N = 8$ e $R = 65$ l’approssimazione è decisamente migliore ed infatti otteniamo $\sqrt{65}$ approssimata alla nona cifra decimale.

Nel prossimo paragrafo proveremo ad estendere le considerazioni precedenti a calcoli più complicati che coinvolgono l’estrazione delle radici di ordine n (terzo, quarto, quinto…che gli antichi erano in grado di eseguire con una certa disinvoltura).

■ 9 Radici cubiche

Un metodo molto semplice per il calcolo delle radici cubiche di numeri fino a 6 cifre, noto agli Indiani come ai Babilonesi, è una sorta di ingegnosa procedura di interpolazione, che illustreremo nel seguito.

Si noti che il metodo che esporremo vale solo nel caso in cui le radici da cercare siano esatte.

Per prima cosa costruiamo la tabella dei cubi fino a 9

n	n^3
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729

Come esempio preliminare consideriamo il calcolo di $\sqrt[3]{5832}$.
Raggruppiamo, come mostrato nella tabella seguente, le cifre separando le ultime tre dalle rimanenti; notiamo che la terna termina per 2, per cui sostituiamo a questa, il numero della tabella precedente il cui cubo termina per 2, ovvero 8 (8 → 512). Mettiamo al posto del numero a sinistra (5) il numero il cui cubo sia inferiore o uguale a 5 (ovvero 1), il numero composto dalle due cifre così ottenute (18) è la radice cubica cercata.

5	832	
1	8	18

A titolo di esercizio riportiamo ulteriori esempi

$\sqrt[3]{19683}$ →

19	683	
2	7	27

$\sqrt[3]{117649}$ →

117	649	
4	9	49

$\sqrt[3]{8000}$ →

8	000	
2	0	20

Come già detto il metodo non si applica al calcolo di radici che non diano un risultato esatto, infatti, se applichiamo la procedura a $\sqrt[3]{729729}$ otteniamo, erroneamente, 99.

■ 10 L'arte del computo, i maestri d'abaco e altro

La storia del computo si dipana nell'arco di tre e passa millenni, e la sua evoluzione è parallela a quella della civiltà stessa. Non è pertanto stupefacente che i problemi algebrici furono posti per la prima volta là dove cominciarono a svilupparsi forme sociali, che facevano uso di tecnologie sufficientemente avanzate e di scambi commerciali complessi.
La figura seguente riporta la copia di una tavoletta sumerica risalente al terzo millennio A.C. e che fa riferimento ad un problema di distribuzione di grano.

Fig. 13: tavoletta sumerica del 2650 A.C.

Probabilmente si tratta di un esempio contabile da utilizzare come schema di riferimento. I dati del problema sono i seguenti: se si ha un granaio contenente 1.152.000 SILA[9] di grano e si foraggia la popolazione con 7 SILA a persona, quanti riceveranno la stessa razione di grano?
Nella figura successiva facciamo riferimento ad una tavoletta babilonese databile tra il 1990 e il 1600 A.C. in cui si riporta un problema geometrico che è essenzialmente il Teorema di Pitagora ovvero trovare la diagonale di un quadrato di lato 30. Il problema coinvolge la radice quadrata di 2, numero che non sembra aver costituito alcuno scandalo per i Babilonesi, certamente più pragmatici dei Greci nei confronti della matematica, come vedremo nel seguito. Il metodo di calcolo delle radici da parte dei matematici di Babilonia appare veramente degno di nota e lo abbiamo citato "en passant" a proposito del metodo di Erone. Il calcolo di $\sqrt{2}$ riportato nella tavoletta è accurato alla sesta cifra decimale, dove i caratteri cuneiformi sono i numeri così "tradotti" in base sessagesimale:

$\sqrt{2} \cong 1;24,\ 51,\ 10$

$30\sqrt{2} \cong 42;25,\ 35$

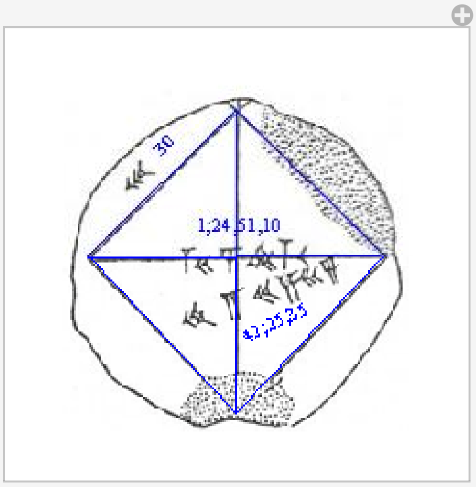


Fig. 14: tavoletta babilonese del 1990–1600 A.C.

Ritornando al problema della risoluzione delle equazioni, ricordiamo che nel papiro egizio di Rhind veniva posto il seguente quesito

Calcolare la quantità, che aggiunta alla sua settima parte, dà 19.

Scritto nel linguaggio attuale tale problema è esprimibile come

$x + \frac{x}{7} = 19$

Gli Egizi erano stati tra i primi ad affrontare il problema delle frazioni e delle relative operazioni, pertanto avevano sviluppato una certa abilità di calcolo aritmetico e inventarono quella che venne poi detta la regola delle falsa posizione (Regula Falsi).

Il problema del papiro Rhindi ammette una soluzione esatta $x = \frac{7 \cdot 19}{8}$, la cui ricerca richiede la capacità di giocare con i simboli algebrici. Qualora non si disponga di tale tecnica, si deve aguzzare l'ingegno e l'idea alla base della regula falsi è quella di assegnare all'incognita (*aha* per gli Egizi) un certo valore arbitrario (e dunque falso); in questo caso si sceglie $x = 7$, in realtà dietro questa assunzione c'è qualcosa di più sottile perché 7 non sottintende 7 e basta, ma sette unità di una certa quantità per noi incognita. Sempre in termini moderni, indicando con u tale unità di riferimento avremo con $x = 7\,u$

$7\,u + \frac{7\,u}{7} = 19$

$8\,u = 19$

$u = \frac{19}{8}$

$\Longrightarrow \;\; x = 7 \cdot \frac{19}{8}$

La regola adottata dagli Egizi era quello di riportare tutto ad unità facilmente calcolabili evitando la ricerca del minimo comune multiplo che evidentemente non conoscevano.

Il risultato $x = \frac{7 \cdot 19}{8}$ è una espressione decifrabile per noi, ma non per gli Egizi, che avevano bisogno di un riferimento pratico in termini di interi o di frazioni esprimibili in multipli di 2. Per cui la procedura successiva doveva essere la seguente, scriviamo

$7 = 4 + 2 + 1$

$19 = 16 + 2 + 1$

$\frac{19}{8} = \frac{16}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$$7 \cdot \frac{19}{8} = 4\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + 2\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 8 + 1 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$
$$= 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Abbiamo insistito su questo esempio per mettere in evidenza come un problema, oggi alla portata di qualsiasi bambino di scuola media inferiore, richiedesse, qualche millennio fa, un notevole sforzo intellettuale.

Una annotazione quasi personale: un tempo si insegnava la *regola del tre semplice* alle scuole elementari, per la risoluzione di problemi del tipo appena discusso. Le nozioni implicite in tale procedura erano le proporzioni e il *metodo di riduzione all'unità*, concettualmente equivalente alla *regula falsi*.

La regola del tre, detta anche *regola aurea* oppure *regola della Santissima Trinità* era in uso in Italia in tempi in cui le formule e le convenzioni matematiche, se pur esistenti, erano appannaggio di una strettissima cerchia di iniziati. Le scuole di ragioneria non esistevano e lo strumento di trasmissione era la tradizione orale, con tutte le ambiguità ad essa associate. Con l'intensificarsi degli scambi e la nascita di pratiche commerciali estese si sentì la necessità di un libro di riferimento e allo scopo Giovanni Sfortunati produsse nel 1534 il "Nuovo Lume - libro di arithmetica", il cui sottotitolo è veramente illuminante

"Intitulato Nuovo Lume, imperoché molte propositioni che per altri auttori, sono falsamente concluse, in questo si emendano, et castigano".

Abbiamo insistito su quest'ultima annotazione per mettere in evidenza come con l'emergere in Italia di una classe borghese che avrebbe cambiato la cultura occidentale, si sentì la necessità di introdurre le cosiddette botteghe d'abaco in cui si sarebbero formate le maestranze (mercanti, ingegneri, architetti..) in grado di sostenere e indirizzare il nuovo corso della storia. L'estrazione delle radici ennesime è stato affrontato dai maestri d'abaco degli anni successivi al XIII secolo utilizzando metodi approssimati non dissimili da quelli illustrati fino ad ora. Invitiamo il lettore a meditare sulla seguente procedura dovuta a Cardano (la relativa trascrizione è in termini attuali) e a effettuare una comparazione con il metodo babilonese

$$\sqrt[n]{N} \cong a + b$$

$$b = \frac{N - a^n}{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k}$$

dove a è il numero che approssima per difetto e b è la relativa correzione; nella figura seguente abbiamo riportato un confronto con il calcolo “esatto”, avendo scelto a pari alla parte intera di $\sqrt[n]{N}$, cioè un numero sufficientemente vicino alla radice cercata.

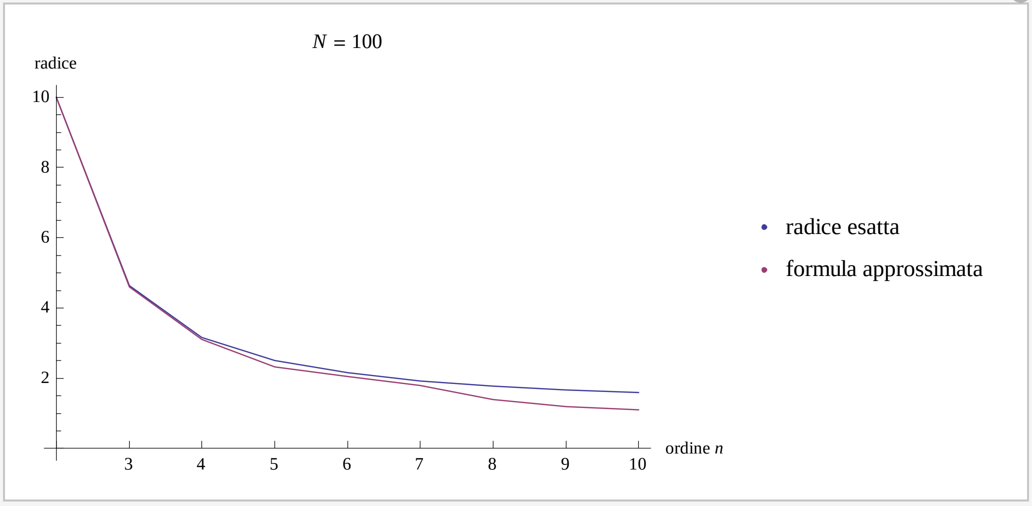


Fig. 15: Confronto tra le radici ennesime calcolate con la formula di Cardano

In questo capitolo abbiamo toccato diverse questioni di aritmetica affastellando problematiche più o meno omogenee, nel prossimo capitolo proveremo a coglierne i tratti comuni.

Capitolo III

Frazioni continue, radicali ripetuti, Numeri di Fibonacci, Pell…e numeri trascendenti

■ 1 Le frazioni continue e i radicali ripetuti: una introduzione preliminare

Nel precedente capitolo abbiamo accennato a procedure iterative, che ci hanno permesso di esprimere la soluzione di una equazione di secondo grado in forma algoritmica. L'iterazione esplicita, relativa alla soluzione dell'equazione $x^2 - x = N$, fornisce il seguente schema[10]

$$x_{n+1} = 1 + \frac{N}{x_n}$$

$$\to 1 + \frac{N}{1+\frac{N}{x_1}}$$

$$\to 1 + \frac{N}{1+\frac{N}{1+\frac{N}{x_2}}}$$

$$\to 1 + \frac{N}{1+\frac{N}{1+\frac{N}{1+\frac{N}{x_3}}}}$$

$$\to 1 + \frac{N}{1+\frac{N}{1+\frac{N}{1+\frac{N}{1+\frac{N}{x_4}}}}}$$

$\to$ ..

Tale espansione ha un nome preciso e viene detta sviluppo in *frazioni continue illimitate* (FCI). Per definizione una frazione continua limitata, come

$$2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}$$

rappresenta un numero razionale (nel caso specifico $\frac{67}{29}$).

Viceversa ogni frazione è esprimibile come una frazione continua limitata e la relativa procedura è piuttosto semplice: consideriamo infatti il seguente esempio[11]

$$\frac{6}{19} = \frac{1}{\frac{19}{6}} = \frac{1}{3+\frac{1}{6}}$$

$$\frac{57}{179} = \frac{1}{\frac{179}{57}} = \frac{1}{3+\frac{8}{57}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{57}{8}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{8}}}$$

E' evidente che il trucco è quello di ridurre le frazioni successive fino a che tutti i numeratori siano 1.

Troncare lo sviluppo di una FCI ad un certo ordine significa trovarne una approssimazione razionale, nel caso dell'esempio iniziale, la radice positiva dell'equazione di secondo grado con un certo livello di approssimazione.

In alternativa alla FCI esistono altri sviluppi di natura iterativa; potremmo, infatti, scrivere la soluzione della nostra equazione nella forma

$$x_{n+1} = \sqrt{N + x_n}$$
$$\to \sqrt{N + x_1}$$
$$\to \sqrt{N + \sqrt{N + x_2}}$$
$$\to \sqrt{N + \sqrt{N + \sqrt{N + x_3}}}$$
$$\to \sqrt{N + \sqrt{N + \sqrt{N + \sqrt{N + x_4}}}}$$

Che rappresenta una ulteriore espansione, nota come *radicali illimitati ripetuti*[12] (RIR).
Un confronto tra i due metodi di soluzione viene mostrato nella figura seguente, da cui risulta evidente che il metodo basato sui rdicali ripetuti converge più rapidamente e senza oscillazioni alla soluzione del problema. Inoltre il metodo vale anche per la ricerca di radici complesse, come illustrato nelle figura successiva.

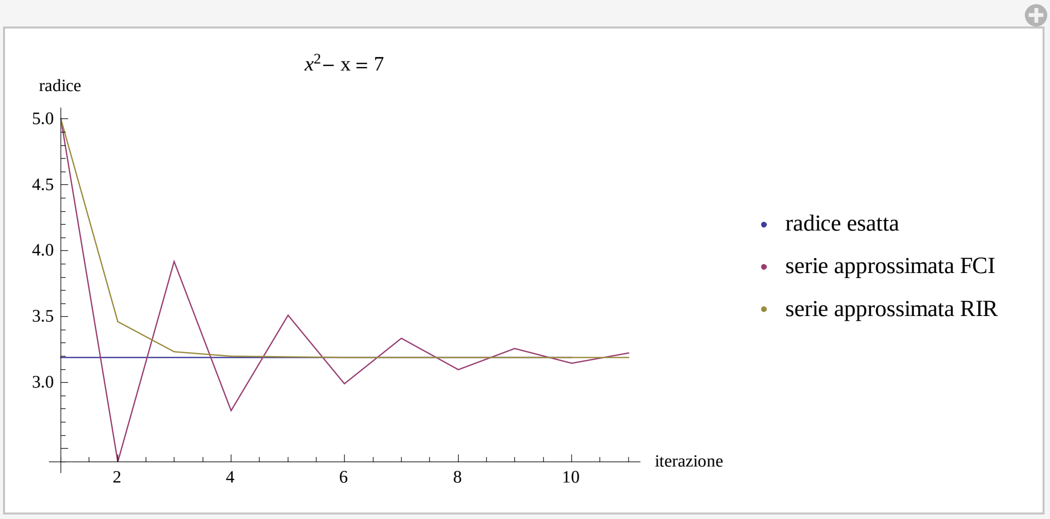


Fig. 16: equazione di secondo grado risolta con l'algoritmo delle frazioni continue e dei radicali ripetuti.

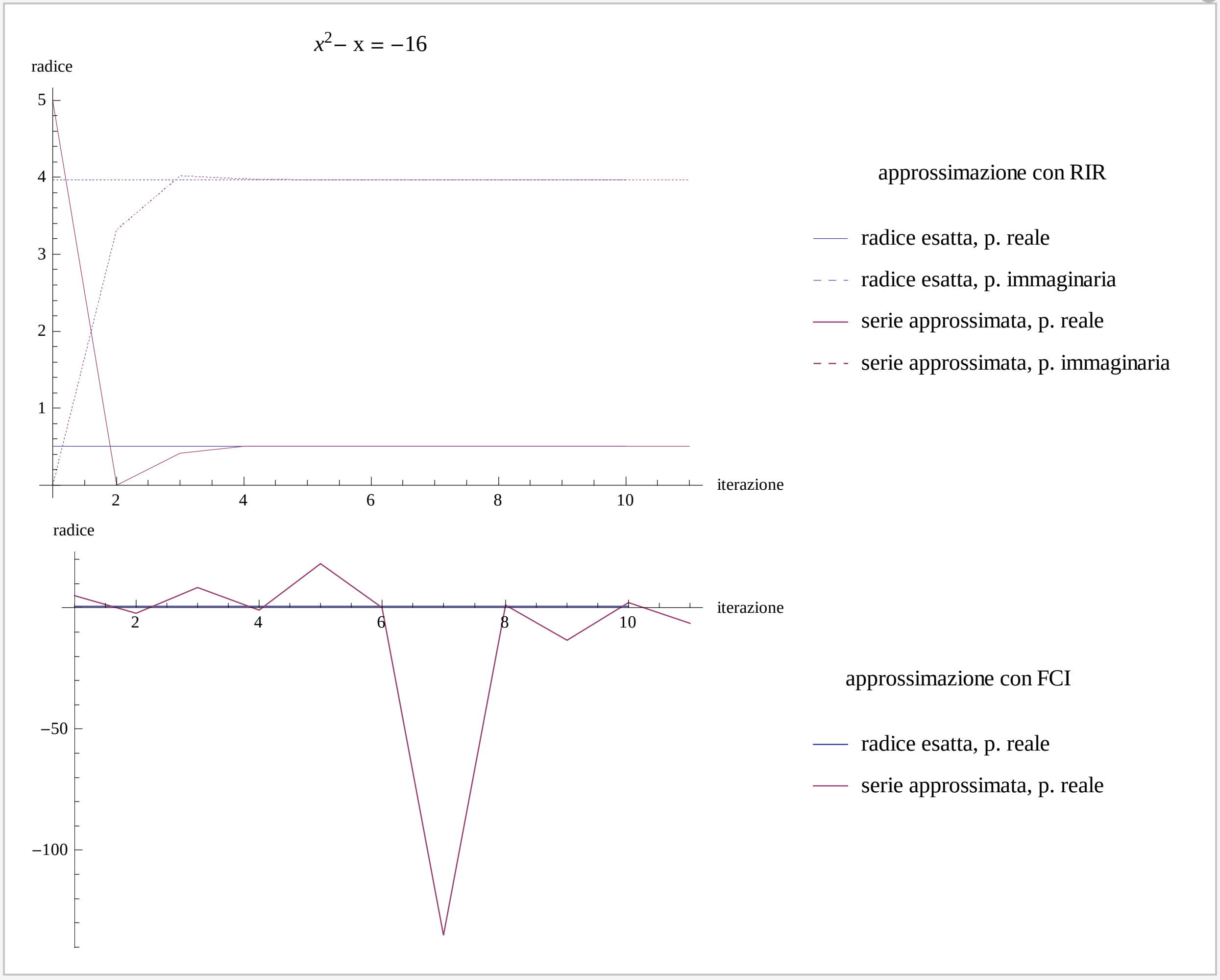


Fig. 17: equazione di secondo grado anche a radici complesse.

Se volessimo applicare il metodo degli integrali ripetuti allo studio delle radici quadrate potremmo approfittare della seguente identità

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4N}\right)=\sqrt{N+\sqrt{N+\sqrt{N+\sqrt{N\,..}}}}$$

dove sulla destra si considera uno sviluppo infinito. La relazione precedente è semplicemente una conseguenza del fatto che lo sviluppo in radicali ripetuti converge alla soluzione positiva della nostra equazione di secondo grado.
Dalla relazione precedente segue dunque che la radice quadrata di un numero potrà sempre essere espressa come

$$\sqrt{R}=2\sqrt{\frac{R-1}{4}+\sqrt{\frac{R-1}{4}+\sqrt{\frac{R-1}{4}+\sqrt{\frac{R-1}{4}\,..}}}}\;-1$$

Nell'ipotesi in cui si voglia evitare l'uso diretto di radici quadrate, tale procedura non risulta essere molto "pratica", perché invece di calcolarne una sola saremmo costretti a calcolarne un gran numero.
L'utilizzo delle frazioni continue risulta essere, invece più agevole, in termini di FCI potremo esprimere la nostra radice nella forma

$$\sqrt{R}=1+2\,\frac{\frac{R-1}{4}}{1+\frac{\frac{R-1}{4}}{1+\frac{\frac{R-1}{4}}{1+..}}}$$

La cui valutazione, ad un certo ordine di approssimazione, richiede un calcolo basato su un numero finito di operazioni razionali.

Vedremo nel seguito perché l'utilizzo dei RIR è utile; prima, a titolo di esempio (su cui torneremo nel seguito) citiamo la cosiddetta formula di Viete in termini di RIR per quanto riguarda il calcolo di π. Consideriamo infatti la seguente ricorrenza

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$
$$x_0 = 0$$

La formula di Viete assicura che

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} ..$$

2 Numeri razionali e frazioni continue

La notazione utilizzata in precedenza per le frazioni continue è piuttosto ingombrante e non del tutto corretta. Nel seguito utilizzeremo la seguente notazione (con a_i interi positivi)

$$[a_0, a_1, a_2 .. a_n ..] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + .. \frac{..1}{a_n + ...}}}$$

detta *frazione continua aritmetica illimitata*.[13]

L'equazione di secondo grado

$$x^2 = a\,x + 1$$

ammette come soluzione la seguente espansione in frazioni continue

$$x_+ = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} = a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + ..}} = [a, a, a ..]$$

Da cui segue il seguente sviluppo per la sezione aurea

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left.\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right|_{a=1} = [1, 1, 1 ..]$$

Abbiamo già avuto modo di notare (l'esempio precedente ne è una prova) che le FCI sono particolarmente utili per il calcolo delle radici quadrate di un dato numero. Discuteremo ora la cosa con maggiore dettaglio. Consideriamo pertanto l'equazione

$$x^2 = 2$$

che potremo riscrivere come

$$x^2 - 1 = 1$$

$$(x - 1)(x + 1) = 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

La relativa soluzione in termini di FCI ha la seguente forma

$$1 + \frac{1}{1+x} \to 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+x}} \to 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+x}} \to 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+x}}} .. \to [1, 2, 2 ..]$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere anche dalla espressione per $\sqrt{R}$, data nel paragrafo precedente, per $R = 2$.

L'espressione ottenuta per $\sqrt{2}$ è quella di una FCI -periodica e di solito vien scritta come

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$$

dove $\overline{2}$ indica che il fattore 2 si ripete identicamente. Vediamo ora come l' espansione in termini di frazioni continue contenga una misteriosa approssimazione vedica di $\sqrt{2}$ che, in termini attuali, viene scritta come

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} ..$$

Se tronchiamo la frazione continua al terzo ordine avremo

$$\sqrt{2} \cong [1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$$

l'ulteriore correzione si ottiene considerando semplicemente l'ordine successivo, ovvero $\sqrt{2} \cong [1, 2, 2, 2]$. Ritorneremo nel seguito sulle approssimazioni razionali della radice quadrata di due. Vediamo ora come il metodo delle frazioni continue sia estendibile ad altri irrazionali (quadratici), tramite strutture periodiche più complesse di quelle relative all'espansione precedente.

- **Calcolo di $\sqrt{3}$**

La procedura di calcolo è analoga al caso di $\sqrt{2}$ ed è eseguita come segue

$$x^2 = 3$$

$$x^2 - 1 = 2$$

$$(x - 1)(x + 1) = 2$$

$$x = 1 + \frac{2}{1+x}$$

$$1 + \frac{2}{1+x} \to 1 + \frac{2}{1+1+\frac{2}{1+x}} \to 1 + \frac{2}{2+\frac{2}{1+x}} \to 1 + \frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{1+x}}} \to 1 + \frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{1+x}}}} \to 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}} .. \to [1, 1, 2, 1, 2 ..] \to \left[1, \overline{1, 2}\right]$$

- **Calcolo di $\sqrt{6}$**

$$x^2 = 6$$

$$x^2 - 4 = 2$$

$$(x - 2)(x + 2) = 2$$

$$x = 2 + \frac{2}{2+x}$$

$$2 + \frac{2}{2+x} \to 2 + \frac{2}{2+2+\frac{2}{2+x}} \to 2 + \frac{2}{4+\frac{2}{2+x}} \to 2 + \frac{2}{4+\frac{2}{4+\frac{2}{2+x}}} \to 2 + \frac{2}{4+\frac{2}{4+\frac{2}{4+\frac{2}{2+x}}}} \to 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}}} .. \to [2, 2, 4, 2, 4 ..] \to \left[2, \overline{2, 4}\right]$$

- **Calcolo di $\sqrt{5}$ ed esercizi**

$$\sqrt{5} = \left[2, \overline{4}\right]$$

viene lasciato come esercizio.

L' espansione di un numero irrazionale in termini di FCI non è immediata e richiede l'acquisizione di un po' di dimestichezza, i seguenti esercizi risulteranno utili per tale scopo

$$\sqrt{15} = \left[3, \overline{1, 6}\right]$$

$$\sqrt{31} = \left[5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 1, 10}\right]$$

La radice di 31 ha un periodo piuttosto lungo ed è piuttosto laboriosa da determinare, è comunque un ottimo test per provare l'abilità acquisita.

Una frazione continua del tipo $[\overline{a_0, a_1, a_2 .. a_n}]$ viene detta *frazione continua illimitata pura*. Esempi relativi a queste frazioni sono il già citato sviluppo della sezione aurea e di

$$3+\sqrt{11} = [\overline{6, 3}]$$

- **Regola pratica**

Una regola pratica, conseguenza di quanto imparato nel presente paragrafo, può essere formulata come segue: dato il numero

$$R = P^2 + 1$$

la sua radice può essere scritta come

$\sqrt{R} = [P, \overline{2\,P}]$

Infatti la procedura diventa

$x^2 = R = P^2 + 1$

$(x + P)\,(x - P) = 1$

$x = P + \frac{1}{P+x}$

$$P + \frac{1}{P+x} \to P + \frac{1}{P+P+\frac{1}{P+x}} \to P + \frac{1}{2\,P+\frac{1}{P+x}} \to P + \frac{1}{2\,P+\frac{1}{2\,P+\frac{1}{P+x}}} \to P + \frac{1}{2\,P+\frac{1}{2\,P+\frac{1}{2\,P+\frac{1}{P+x}}}} .. \to [P, 2\,P, 2\,P\,..] \to [P, \overline{2\,P}]$$

Abbiamo già fatto notare che, troncando una frazione continua illimitata periodica ad un certo ordine, si ottiene un numero razionale che fornisce una approssimazione del numero irrazionale rappresentato dalla espansione in frazioni continue. Eseguendo esplicitamente il calcolo e troncando lo sviluppo al secondo e al terzo ordine otteniamo

$$\sqrt{1 + x^2} = [x, \overline{2\,x}] = \begin{cases} x + \frac{2\,x}{4\,x^2+1} & \text{ordine 2} \\ x + \frac{4\,x^2+1}{8\,x^3+4\,x} & \text{ordine 3} \end{cases}$$

Lo sviluppo viene utilizzato per valori di P interi e maggiori di 1. E’ però istruttivo chiedersi cosa succede se consideriamo tale approssimazione per valori non interi: nella figura seguente vengono confrontati vari livelli di approssimazione (secondo, terzo e quarto) con la funzione $\sqrt{1 + x^2}$ nell’intervallo $0 \leqslant x < 1$

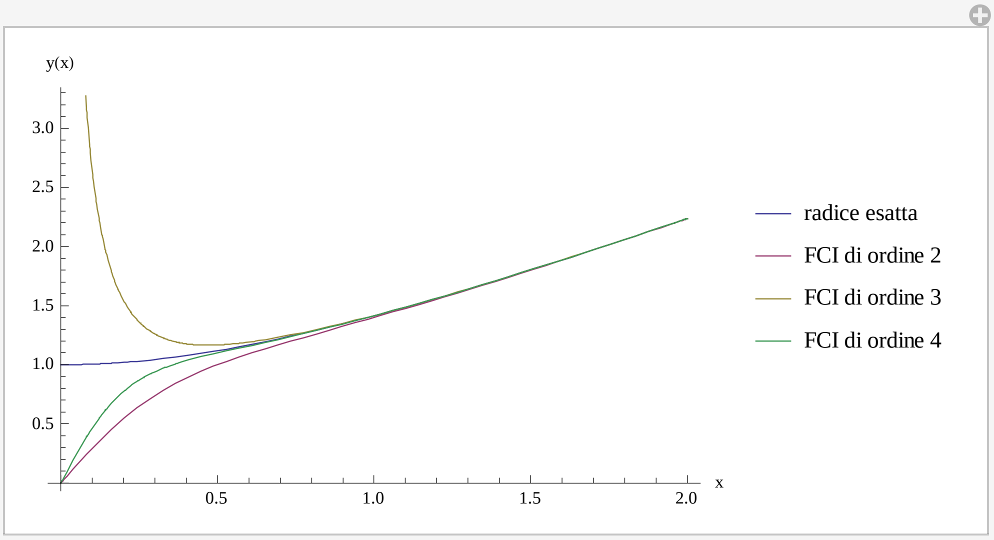


Fig. 18: confronto tra approssimazioni in frazioni continue di $\sqrt{1+x^2}$.

La figura mostra che anche in questa regione almeno per valori della variabile maggiori di 0.5, l’approssimazione non è cattiva. Al di sopra di uno, l’errore percentuale dal valore reale risulta essere inferiore all’1% anche per lo sviluppo al secondo ordine.

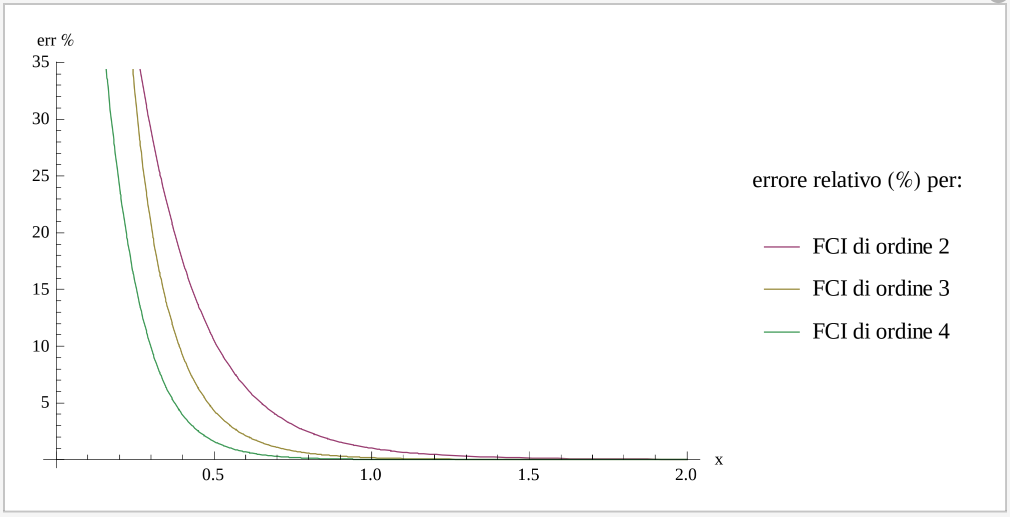


Fig. 19: errore relativo all'approssimazione in frazioni continue di $\sqrt{1+x^2}$.

Nel paragrafo conclusivo di questo capitolo discuteremo come espansioni del tipo precedente possano essere confrontate con metodi analitici più convenzionali, quali lo sviluppo in serie di potenze.

Abbiamo sottolineato che ogni frazione continua illimitata può essere troncata ad un certo ordine, ottenendo una frazione finita, ovvero

$$[a_0,\, a_1,\, a_2 \,..\, a_n] \to \begin{array}{ccc} a_0 & = & a_0 \\ [a_0,\, a_1] & = & \frac{a_0\, a_1+1}{a_1} \\ [a_0,\, a_1,\, a_2] & = & \frac{a_2(a_0\, a_1+1)+a_0}{a_2\, a_1+1} \\ [a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3] & = & \frac{a_3[a_2(a_0\, a_1+1)+a_0]+a_0\, a_1+1}{a_3[a_2\, a_1+1]+a_1} \\ .. & = & .. \\ [a_0,\, a_1,\, a_2 \,..\, a_n \,..] & = & .. \end{array}$$

che vengono dette le *ridotte* ed indicate con $\frac{p_n}{q_n}$. Se si osserva attentamente la seconda colonna delle relazioni precedenti si è portati a concludere che il numeratore e il denominatore delle ridotte soddisfano le seguenti relazioni di ricorrenza

$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}$ con $p_{-1} = 1$ e $p_0 = a_0$

$q_n = a_n\, p_{n-1} + q_{n-2}$ con $q_{-1} = 0$ e $q_0 = 1$

avremo dunque che

$[a_0,\, a_1,\, a_2 \,..\, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n\, p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n\, p_{n-1}+q_{n-2}}$

Nel caso in cui la frazione continua sia periodica e dunque a_n sia facilmente determinabile come nel caso di $\sqrt{2}$ in cui $a_n = 2$, notiamo che la sua approssimazione razionale con $n = 8$ è fornita da $\frac{577}{408} = 1.414215$ che risulta essere corretta fino alla quinta cifra decimale. Nel caso di $\sqrt{5}$ (cioè $a_n = 4$) l'approssimazione di ordine 4 fornisce la seguente frazione approssimante $\frac{161}{72} = 2\ .2361$, corretta alla terza cifra decimale.

■ 3 Equazioni alle ricorrenze, numeri di Pell e di Fibonacci

Le equazioni alle ricorrenze che hanno chiuso il paragrafo precedente possono essere risolte facilmente se ci si limita a casi particolari. Consideriamo quello in cui a_n sia indipendente da n: sotto tale ipotesi il nostro problema si riduce a

$s_n = a\, s_{n-1} + s_{n-2}$
$s_0 = \alpha$
$s_1 = \beta$

Le condizioni per gli indici $n = 0{,}1$ sono necessarie perché altrimenti la soluzione del problema risulterebbe indeterminata.

La situazione ricorda quella delle equazioni differenziali del secondo ordine e la relativa soluzione può essere ottenuta utilizzando il metodo di Binet. Poniamo, pertanto

$$s_n = s^n$$

e lo sostituiamo nella equazione di ricorrenza; siamo così in grado di ridurre il nostro problema alla seguente equazione di secondo grado

$$s^2 - a\,s - 1 = 0$$

con radici s_+ e s_-. Possiamo pertanto concludere che la soluzione del problema è fornita dalla seguente combinazione lineare

$$s_n = l\,s_+^n + m\,s_-^n$$

In cui le costanti arbitrarie l e m si determinano imponendo le condizioni iniziali, che danno

$$l + m = \alpha$$
$$l\,s_+^n + m\,s_-^n = \beta$$

In conclusione otteniamo

$$s_n = \frac{1}{s_+ - s_-}\left[\alpha\left(s_-\,s_+^n - s_+\,s_-^n\right) - \beta\left(s_+^n - s_-^n\right)\right]$$

Consideriamo il caso in cui $\alpha = 2$, $s_0 = 0$, $s_1 = 1$: i numeri generati dalla ricorrenza sono dati da

$$p_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

e sono detti numeri di Pell. I primi della serie sono 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985 .. ed è interessante notare che il rapporto $R_n = \frac{s_{n+1}}{s_n} - 1$ rappresenta una approssimazione razionale di $\sqrt{2}$ che diventa sempre migliore al crescere di n (Esempio: $\frac{s_9}{s_8} - 1 = \frac{577}{408} = 1.414215686$, $\sqrt{2} \cong 1.414213562373095$).
Nel caso in cui si prenda in considerazione $a = 2\,P$ l'equazione alle ricorrenze associata è

$$s_n = 2\,P\,s_{n-1} + s_{n-1}$$
$$s_0 = 0$$
$$s_1 = 1$$

e la relativa soluzione può essere scritta come

$$p_n = \frac{\left(1+\sqrt{P^2+1}\right)^n - \left(1-\sqrt{P^2+1}\right)^n}{2\sqrt{P^2+1}}$$

anche in questo caso (si veda la figura seguente) il rapporto R_n costituisce una approssimazione razionale di $\sqrt{P^2+1}$.

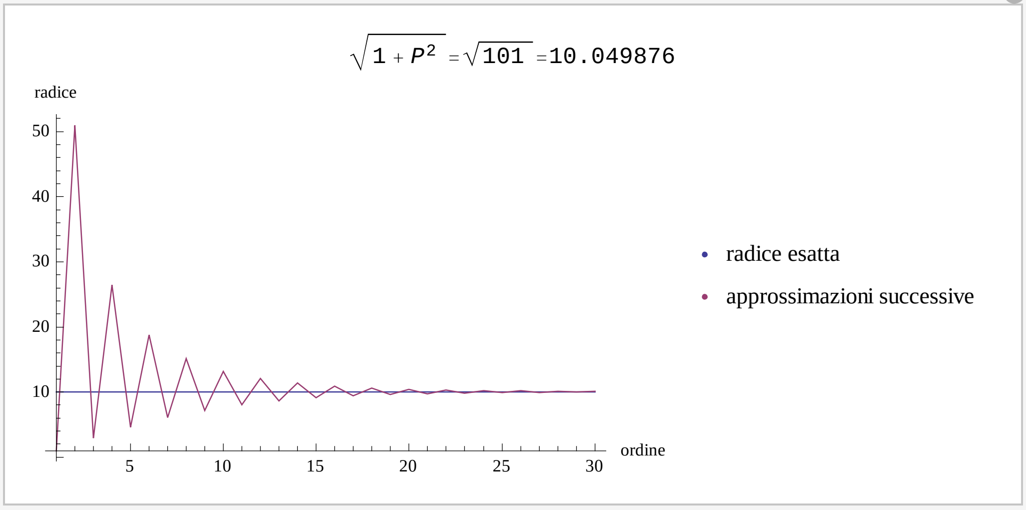


Fig. 20: approssimazioni razionali successive.

La sezione aurea ϕ è associabile ad una successione di tipo Pell, definita da

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Infatti $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si ha lo cosiddetta formula di Binet

$$F_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

che soddisfa lea seguente equazione alle ricorrenze

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$

I numeri F_n sono detti numeri di Fibonacci.
La loro fama deriva dal fatto di essere generati tramite la sezione aurea che rappresenta per molti (ma non per chi scrive) un numero con prerogative esoteriche. Non è escluso che i numeri di Pell, generati dalla meno nota *sezione argentea*

$$\sigma = 1 + \sqrt{2} \implies p_n = \frac{\sigma^n - (1-\sigma)^n}{2\sqrt{2}}$$

abbiano proprietà altrettanto fuori dall'ordinario. Nella figura seguente riportiamo una costruzione geometrica della sezione argentea, che non è meno entusiasmante di quella aurea che viene mostrata nuovamente in quella successiva.
I numeri di Fibonacci hanno avuto una diffusione straordinaria (a volte vengono detti *favolosi*) e sono citati (qualche volta a sproposito) perché ricorrono in una infinità di problemi (Matematica, Fisica, Finanza, Botanica…). I numeri di Pell sono citati molto meno e i numeri noti come *irrazionali quadratici* (IQ) lo sono ancora meno. Eppure i numeri di Fibonacci e di Pell sono solo un caso particolare degli IQ

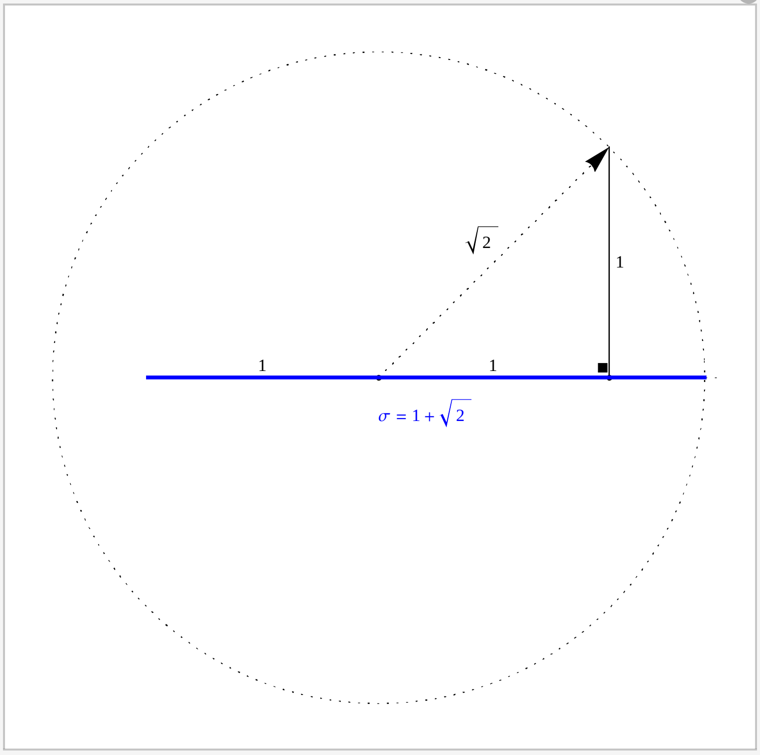


Fig. 21: la sezione argentea.

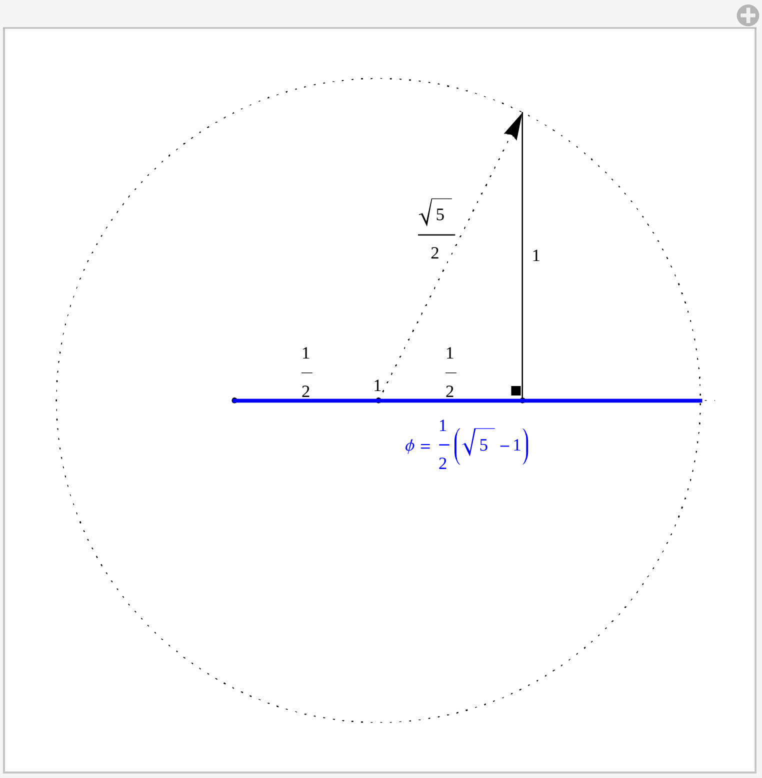


Fig. 22: la sezione aurea.

■ 4 Gli Irrazionali Quadratici

Le seguenti combinazioni

$$\alpha_+ = a + \sqrt{D}$$
$$\alpha_- = a - \sqrt{D}$$

con a e D interi, sono dette *numeri irrazionali quadratici reciprocamente coniugati*.

Il numero $\alpha_+ = 1 + \sqrt{3}$, soluzione dell'equazione $x^2 - 2x - 1 = 0$, è dunque un irrazionale quadratico.

Diremo inoltre che un irrazionale quadratico x_+ è *ridotto* se il suo coniugato soddisfa la condizione $-1 < x_- < 0$. Quindi $1 + \sqrt{3}$ è un irrazionale quadratico ridotto. Numeri del tipo

$$\alpha_+ = \frac{a+\sqrt{D}}{2}$$
$$\alpha_- = \frac{a-\sqrt{D}}{2}$$

sono irrazionali quadratici se a è dispari e se $D = 4p + 1$.[14]

Il numero $\rho = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (che chiameremo sezione *bronzea*) è un irrazionale quadratico ridotto, legato alla sezione aurea da[15]

$$\rho = 1 + \phi$$

Tutti gli irrazionali quadratici ridotti ammettono uno sviluppo in frazioni continue illimitate periodiche pure.[16]

Pertanto la radice di un numero del tipo $4p + 1$ può essere espressa in termini di una frazione continua illimitata periodica ed ammette una approssimazione razionale in termini delle associate frazioni parziali.

■ 5 Considerazioni geometriche e neoplatoniche

I numeri di Fibonacci costituiscano una sequenza di numeri con proprietà non più interessanti di altre: molte delle suggestioni ad essi associate e certe fascinazioni ricorrenti di natura neoplatonica sono dovute al loro legame con la sezione aurea, che gli antichi (ma non i Greci) chiamavano *proporzione divina*. Torneremo spesso sui possibili fraintendimenti che ne derivano. Poiché certi riferimenti saranno ricorrenti nel seguito, ricordiamo che quanto successivamente detto è la soluzione di un problema proposto da Euclide (Elementi, Libro VI, trentesima proposizione), ovvero (si veda anche la figura seguente):

Dato un segmento $\overline{\mathrm{AE}}$ si determini un punto B in modo tale che $\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BE}}}$

in notazione moderna seguendo quanto riportato in figura non abbiamo nessuna difficoltà a concludere che

$$\overline{\mathrm{MC}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\overline{\mathrm{MB}} = \frac{1}{2}$$
$$\overline{\mathrm{BE}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

e che

$$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BE}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

e che, infine, il problema proposto da Euclide è, in tal modo, risolto. Il segmento $\overline{\mathrm{AE}}$ è il rapporto aureo e AEFD è il rettangolo aureo.

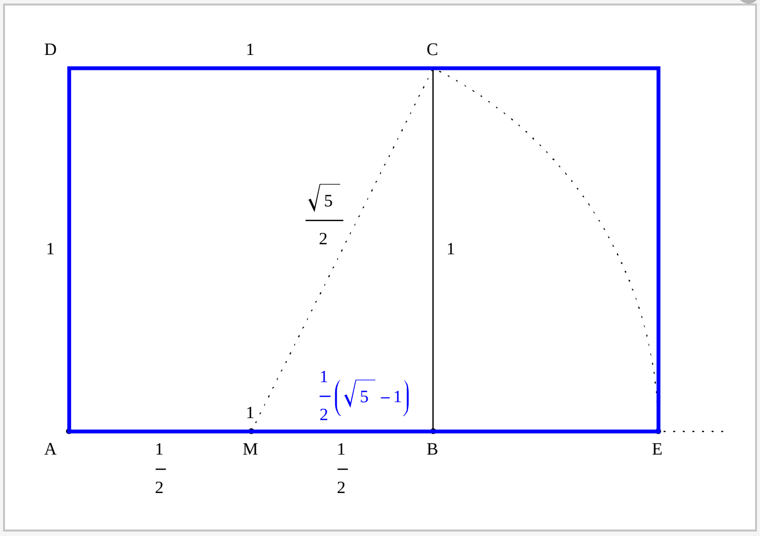


Fig. 23: costruzione del rettangolo aureo.

Le suggestioni neoplatoniche sono dure a morire e si insinuano come una fantasia perversa e ricorrente nelle menti di qualche scienziato. Avviene ad esempio che qualcuno sogni di ridurre la Fisica (ma anche la scienza in generale) ad una sorta di gioco alchemico, in cui le costanti universali vengono ridotte al rapporto tra numeri particolari (primi, trascendenti, irrazionali…) e ϕ è uno di questi. Nell'ambito di certe teorie[17], proposte come alternative a quelle correnti[18], si suggerisce che le masse dei quarks sono legate alla sezione aurea da relazioni del tipo

$$m_u = (1/\phi)^3 + 1 = 5 + \phi^3 \text{ MeV}$$
$$m_d = (2)\,(1/\phi)^3 = 8.472135954 \quad \text{MeV}$$
$$m_s = (1/\phi)^6\,(10) = 179.442719 \; = \langle m_\pi \rangle\,(1/\phi)^2 \text{ MeV}$$

La consistenza scientifica di tali relazioni è molto dubbia, ma accade spesso che si faccia ricorso a ingiustificate coincidenze numeriche per costruire speculazioni pseudo scientifiche. Un esempio in tal senso è costituito dalla "legge" di Titius-Bode, che lega la distanza media dei pianeti dal sole secondo la formula

$$d_n = \frac{1}{10}\left(2^{n-2}\cdot 3 + 4\right), \quad n = 2,\ 3,\ ..$$

dove d_n viene espresso in unità di distanza sole-terra.

Pochi sanno che insieme ai numeri di Fibonacci esiste una ulteriore famiglia di numeri, nota come numeri di *multinacci*. Non si tratta di una irreverente espressione, tratta dal crudo dialetto romano, ma di una famiglia di numeri definiti dalle ricorrenze

$$t_n = t_{n-3} + t_{n-2} + t_{n-1}$$
$$t_0 = 0$$
$$t_{r\leqslant 3} = 1$$

detti numeri di *Tribonacci*, e

$$q_n = q_{n-4} + q_{n-3} + q_{n-2} + q_{n-1}$$
$$q_0 = 0$$
$$q_{r\leqslant 4} = 1$$

detti numeri di *Tetranacci*, e più in generale

$$m_n = \sum_{j=0}^{p} q_{n-j}$$
$$q_0 = 0$$
$$q_{r\leqslant j} = 1$$

detti numeri di *Pinacci.*

La soluzione delle precedenti equazioni con il metodo di Binet risulta laboriosa perché il problema è riconducibile alla soluzione di una equazione algebrica di terzo grado per i Tribonacci, di quarto per i Tetranacci e di grado p per i Pinacci. La seguente formulazione in termini della legge di Titius-Bode in termini dei numeri di Tetranacci

$$d_n = \frac{1}{10}\,(q_{n+3} + 3)\,, \quad n = 1, 2, \,..$$

ha migliorato l'accordo con i dati misurati, come mostrato nella tabella che mette a confronto valori sperimentali, formulazione convenzionale e in termini di numeri di Tetranacci.

Pianeta	distanza effettiva	Bode	Tetranacci
Mercurio	0.39	0.40	0.40
Venere	0.72	0.70	0.70
Terra	1.00	1.00	1.00
Marte	1.52	1.60	1.60
asteroidi	2.70	2.80	2.80
Giove	5.20	5.20	5.20
Saturno	9.64	10.00	9.70
Urano	19.20	19.60	18.40
Nettuno	30.10	38.80	35.20
Plutone	39.40	77.20	67.60

Poiché non esiste alcuna teoria in grado di spiegare le ragioni di tale accordo, ogni speculazione è priva di fondamento. L'atteggiamento più saggio di fronte a coincidenze di questo tipo è far notare che la predizione sul nono pianeta è sbagliata di molto mentre per altre potrebbe essere migliore.
Prima di chiudere questo capitolo è opportuno discutere se altri tipi di espansione possano essere utilmente adoperati per approssimare le radici quadrate.

Consideriamo la seguente funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, il cui sviluppo in serie tramite il binomio di Newton può essere scritto come[19]

$$f(x) \cong 1 + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{8}\,x^4 + \frac{1}{16}\,x^6 - \frac{5}{128}\,x^8 + \frac{7}{256}\,x^{10}\,..$$

Sappiamo che l'espansione converge (ovvero fornisce valori sempre più vicini alla funzione originale al crescere dell'ordine dello sviluppo) per valori della variabile tali che $|x| < 1$, possiamo pertanto confrontare l'espansione in serie binomiale con la corrispondente sviluppo in frazioni continue entrambi al secondo ordine. Il confronto fatto nella figura seguente mostra un comportamento complementare: l'approssimazione in serie binomiale peggiora al crescere della variabile.

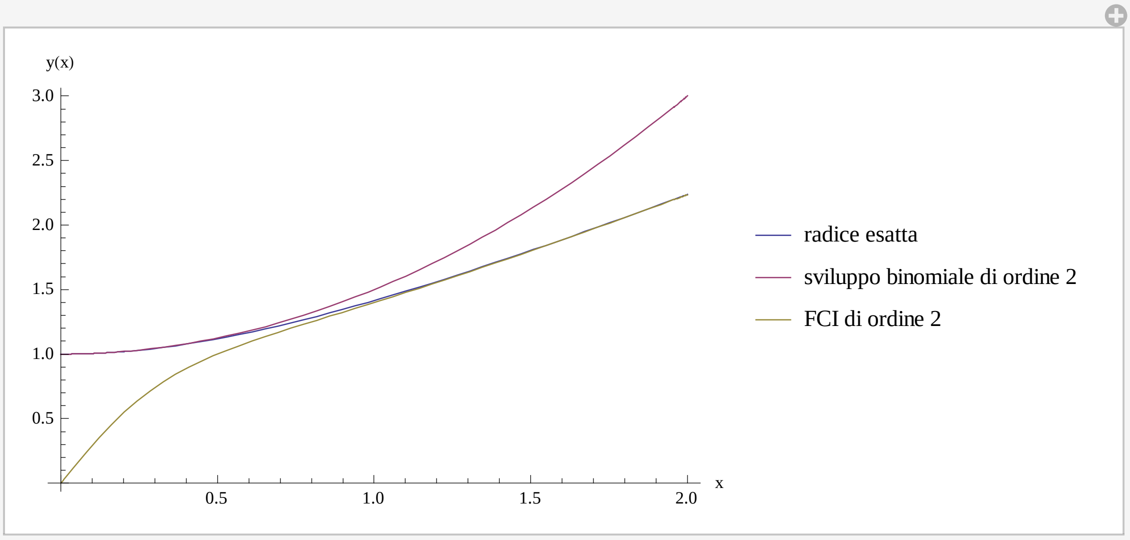


Fig. 24: confronto dello sviluppo binomiale ed in frazioni continue per $\sqrt{1+x^2}$.

Possiamo applicare il metodo dello sviluppo in serie binomiale al calcolo di $\sqrt{1 + P^2}$ nel caso in cui $P > 1$, utilizzando il seguente trucco che fornisce una ulteriore approssimazione razionale del nostro problema

$$R = P\sqrt{1 + \left(\frac{1}{P}\right)^2} \cong P\left(1 + \frac{1}{2P^2} - \frac{1}{8P^4}\right) = P + \frac{1}{2P} - \frac{1}{8P^3} = \frac{8P^4 + 4P^2 - 1}{8P^3}$$

Concludiamo questo capitolo con qualche annotazione di natura pratica.

Consideriamo il calcolo di radici quadrate che coinvolgano la somma di due quadrati, in questo caso applicando quanto imparato potremmo procedere come segue

$$\sqrt{m^2 + P^2} = m\sqrt{1 + \left(\frac{P}{m}\right)^2} \cong \frac{4P^3 + 2mP^2 + 3m^2P + m^3}{4P^2 + 2mP + m^2}$$

per la cui derivazione abbiamo utilizzato uno sviluppo in frazioni continue nella variabile $\frac{P}{m}$ al secondo ordine.
Inoltre potremmo anche adoperare approssimazioni "semi-razionali" secondo il seguente esempio

$$\sqrt{1 + Q} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{Q}\right)^2} \cong \frac{4\sqrt{Q^3} + 2Q + 3\sqrt{Q} + 1}{4Q + 2\sqrt{Q} + 1}$$

utile nel caso in cui si conosca una approssimazione razionale di $\sqrt{Q}$.

Approfittando dello stesso punto di vista, possiamo concludere che ogni equazione di secondo grado può essere risolta in termini di FCI periodiche di tipo puro. La dimostrazione e piuttosto semplice e viene riportata di seguito. L'equazione algebrica di secondo grado

$$A\,x^2 = B\,x + C$$

può essere riscritta nella forma

$$\xi^2 = b\,\xi + 1$$

con $\xi = \sqrt{\frac{A}{C}}$ e $b = B\sqrt{\frac{C}{A}}$

La relativa soluzione, in termini di FCI, sarà pertanto data da

$$\xi = [\overline{b}] \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{C}{A}}\,\left[\overline{B\sqrt{\frac{C}{A}}}\,\right]\left[\sqrt{\frac{C}{A}}\,\right]$$

In questo capitolo abbiamo imparato molte cose, combinato (in maniera anche sconsiderata) nozioni varie e lasciato aperte alcune questioni, che cercheremo di chiarire nel seguito.

6 Le radici cubiche

Nel paragrafo iniziale abbiamo citato la procedura "incestuosa" utilizzata per risolvere le equazioni di secondo grado. Sebbene assolutamente immorale, il metodo ci ha permesso di definire lo sviluppo degli irrazionali quadratici in termini di frazioni continue.
In questo paragrafo affronteremo il calcolo delle radici cubiche utilizzando una procedura perfino più indicibile, nella sua promiscuità, della precedente.
Consideriamo dunque l'equazione

$$x^3 = a$$

che riscriveremo nella forma equivalente

$$x^2(1 + x) = a + x^2$$

In analogia a quanto fatto nel caso dell'equazione di secondo grado, utilizzeremo la seguente forma ibrida di soluzione

$$x = \sqrt{\frac{a + x^2}{1 + x}}$$

la quale suggerisce la seguente procedura iterativa (che diremo algoritmo sirventese[20]) per il calcolo della radice cubica di a

$$x_0 = k$$

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{a+x_n^2}{1+x_n}}$$

dove k è un valore iniziale di prova. Come nel caso dell'algoritmo babilonese, il numero di iterazioni necessarie per raggiungere la "convergenza" al valore desiderato dipende dalla scelta di k. Nella figura seguente riportiamo il calcolo di $\sqrt[3]{7894}$ per approssimazioni successive: una buona approssimazione con errore inferiore al 0.1% si ottiene dopo 5 o 6 iterazioni.

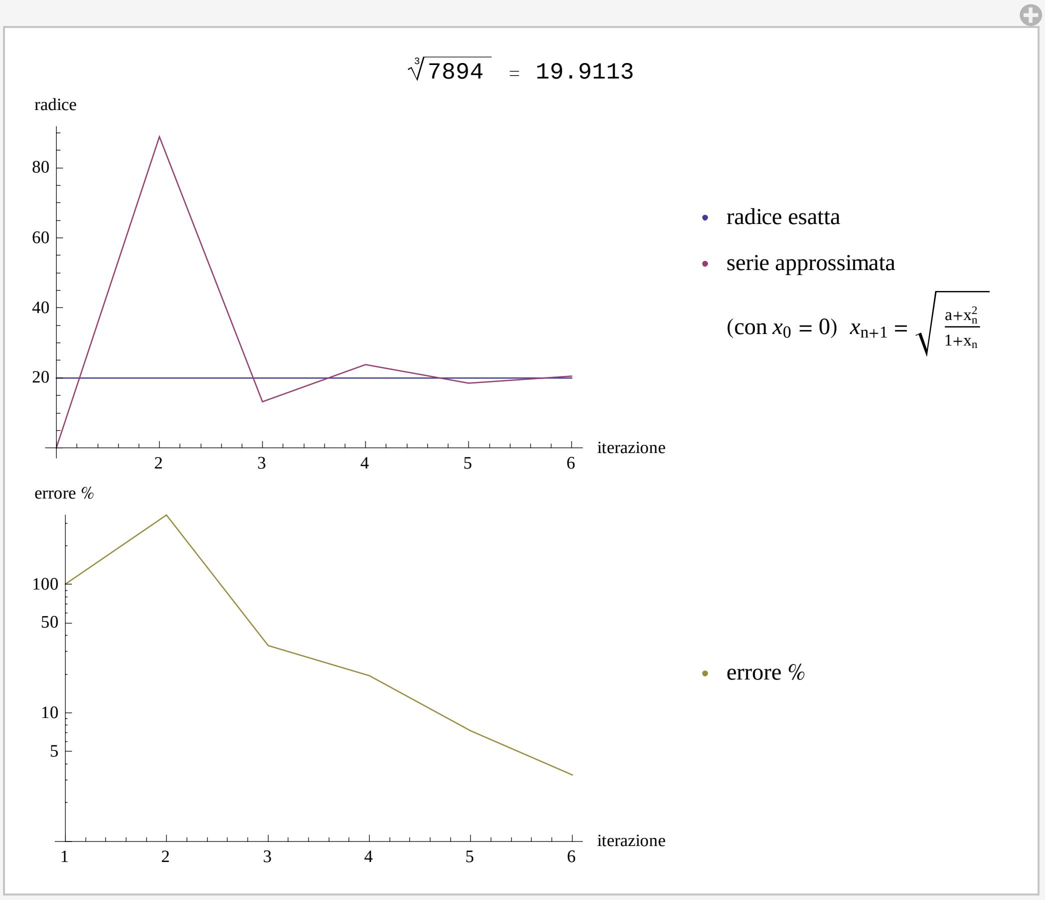


Fig. 25: calcolo della radice cubica con il metodo sirventese.

Di algoritmi di tipo sirventese se ne possono inventare ad libitum e non a caso abbiamo citato il problema della "convergenza". Non vorremmo dare l'impressione che, dato un algoritmo iterativo, il problema sia solo quello di una maggiore o minore lentezza a raggiungere un certo livello di approssimazione. Può anche succedere che l'algoritmo sia instabile, ovvero che, dopo un certo numero di iterazioni, invece di avvicinarci alla soluzione ce ne allontaniamo sempre di più.
Un esempio è il seguente: consideriamo di "generare" l'algoritmo di estrazione della radice cubica dalla seguente identità

$$x\left(1+x^2\right) = a + x$$

da cui potremmo dedurre la seguente procedura iterativa

$$x_0 = k$$
$$x_{n+1} = \frac{a+x_n}{1+x_n^2}$$

che però non funziona perché l'iterazione non converge, anzi diverge. Come riportato nella figura successiva, è interessante notare che l'instabilità tende a comparire dopo numero di iterazioni tanto maggiore quanto più vicino è il valore iniziale al valore esatto

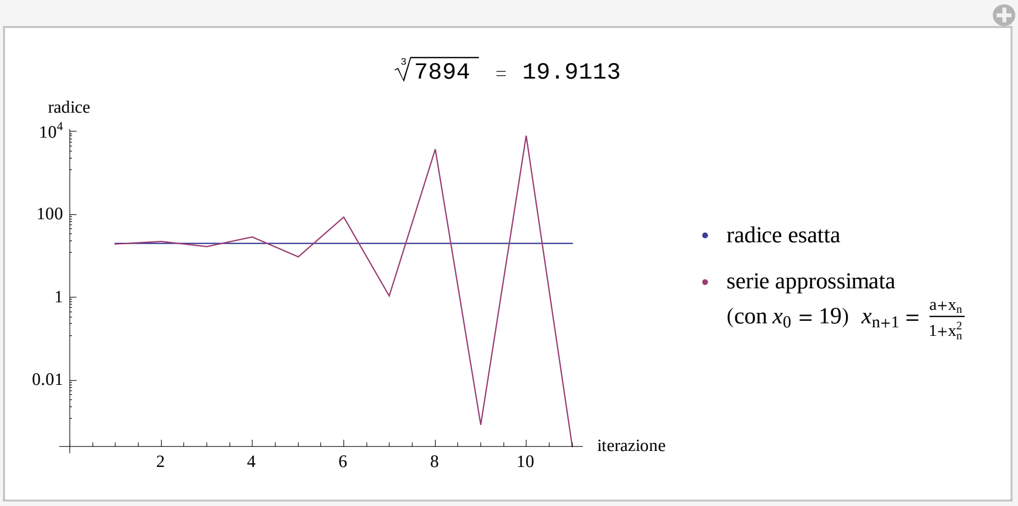


Fig. 26: calcolo della radice cubica con un metodo sirventese non funzionante (divergente).

A questo punto possiamo estendere l'algoritmo sirventese notando che non è particolarmente difficile concludere che la radice quarta di un numero può essere calcolata come

$$x_0 = k$$

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{a+x_n^3}{1+x_n^2}}$$

E che più in generale la radice *m*-sima di *a* può essere inferita tramite l'algoritmo

$$x_0 = k$$

$$x_{n+1} = \sqrt[m-1]{\frac{a+x_n^{m-1}}{1+x_n^{m-2}}}$$

Esaminando quello che abbiamo fatto, possiamo concludere che la nostra strategia è stata quella di ridurre il calcolo della radice di ordine *n* a quello di una radice di ordine *n*-1. Procedura legittima, ma certamente non pratica; un metodo certamente più semplice da un punto di vista computazionale è il seguente, riscriviamo la nostra equazione di partenza nella forma

$$3\,x^3 - 2\,x^3 = a$$

e cerchiamo la soluzione come

$$x = \frac{1}{3}\left(2\,x + \frac{a}{x^2}\right)$$

che suggerisce il seguente algoritmo iterativo

$$x_0 = k$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2\,x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

equivalente al metodo di Newton per la soluzione delle equazioni cubiche. Infatti

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

con $f(x) = x^3 - a$, si ha $f'(x) = 3\,x^2$, quindi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 - a}{3\,x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3\,x_n^2} = \frac{2}{3}\,x_n + \frac{a}{3\,x_n^2}$$

cioè

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2\,x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

Nella figura seguente riportiamo il confronto tra i due metodi.

Va fatto notare che il metodo di Newton dipende fortemente dal valore iniziale mentre l'algoritmo sirventese è, rispetto a questo, molto meno critico.

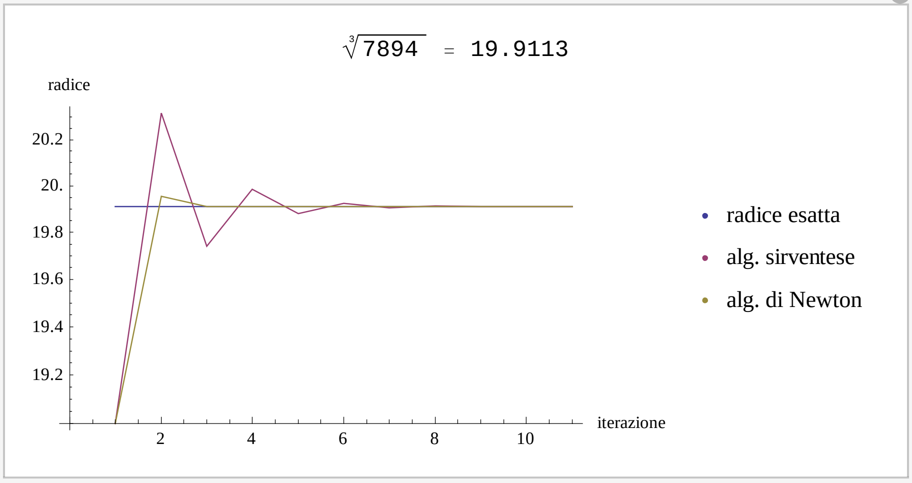


Fig. 27: confronto tra il metodo sirventese e quello di Newton con $x_0 = 19$.

Infine è abbastanza facile dimostrare che la radice m-sima di un numero a si può calcolare come

$$x_0 = k$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)\,x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\right)$$

Nei prossimi capitoli ritorneremo a discutere le questioni precedenti provando a generalizzarle. Per il momento diamo per scontato che siamo andati un po' oltre l'algoritmo babilonese (o di Erone), che abbiamo trovato un modo di includere le visioni veda nella nostra concezione moderna, ma (fortunatamente) abbiamo ancora molto da imparare.

■ 7 …e i numeri trascendenti?

Abbiamo imparato a trattare i numeri irrazionali utilizzando le frazioni continue, ma non quelli trascendenti, che sono numeri certamente "peggiori" dei numeri irrazionali in quanto non solo non sono esprimibili come rapporti tra interi, ma non sono nemmeno soluzioni di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. I numeri trascendenti sono pertanto irrazionali e non algebrici.
Al contrario dei numeri primi, nobilmente solitari e rarefatti, la volgarità dei numeri trascendenti è testimoniata dal loro promiscuo addensarsi e, infatti, come dimostrato da Cantor, qualsiasi intervallo (a, b) contiene un infinito numero di "numeri trascendenti", eppure riconoscere la trascendenza di un numero non è facile.
Liouville dimostrò che il numero

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$$

è trascendente; la trascendenza di π fu ipotizzata da Lambert che ne dimostrò l'irrazionalità, Hermite provò la trascendenza del numero di Nepero tramite lo sviluppo di un metodo successivamente utilizzato da Lindemann per dimostrare la trascendenza di π. Infine Gelfond, risolvendo il decimo problema di Hilbert, provò che sono irrazionali tutti i numeri del tipo a^b dove a è un numero algebrico e b è un numero algebrico irrazionale. E' anche ben nota la riluttanza dei numeri trascendenti a dichiarare la loro natura, si sospetta che la costante di Eulero Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln(n)\right) = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992$$

sia un numero trascendente, così pure per la costante di Apery

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.2020569031595942853997381615114499907649862 92$$

Se dessimo per scontata l'espressione di π in termini di un numero infinito di cifre decimali e le troncassimo ad un certo ordine di approssimazione, ad esempio $\pi \cong 3.14159265$, potremmo ottenere la relativa espansione in frazioni continue come

$$\pi \cong 3.14159265 = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2]$$

e scrivere in corrispondenza di queste varie approssimazioni razionali, come

$$\frac{22}{7} = \frac{1}{3+\frac{1}{7}} = [3; 7] = 3.14286 \cong \pi$$

$$\frac{333}{106} = \frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}} = [3;\,7,\,15] = 3.14151 \cong \pi$$

$$\frac{355}{113} = \frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+1}}} = [3;\,7,\,15,\,1] = 3.14159 \cong \pi$$

In questo modo deriviamo soltanto vari tipi di frazioni approssimanti utilizzate nel corso dei secoli. Sicuramente più interessante sarebbe ottenere una espansione in termini di frazioni continue da cui derivare π con qualsivoglia accuratezza. Esistono vari metodi, non solo per π ma anche per altri numeri trascendenti: noi ne citeremo nel seguito solo alcuni.
Considerando infatti l'espansione di Taylor della funzione arctan (x) otteniamo

$$\arctan(x) \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n\text{-}1}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n\text{-}1}\,\frac{1}{2n+1}$$

Raggruppando i vari termini della serie come

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots + (\text{-}1)^{n\text{-}1}\,\frac{1}{2n+1}$$

e tenuto conto che la serie *telescopica* converge all'unità, ovvero

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\text{-}1)^{n\text{-}1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

scriveremo

$$\frac{\pi}{4} = 1 \ldots - \sum_{n=0}^{\infty} (\text{-}1)^{n\text{-}1}\,\frac{1}{2n+1}$$

Che, dopo un ulteriore riaggiustamento, fornisce l'espressione

$$\pi = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\text{-}1)^{n\text{-}1}}{2n\,(2n+1)\,(2n+2)}$$

Con un po' di fatica da questa si arriva alla formula di Eulero

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1\cdot 2}{1+\frac{2\cdot 3}{1+\frac{2\cdot 4}{1+\ldots}}}}$$

Abbiamo citato questo esempio, prima di tutto perché è un "bel" risultato, ma anche perché esprime una idea di regolarità che è assolutamente assente nel caso della espansione decimale. Una simile osservazione vale per i numeri "semplicemente" razionali che rivelano strutture periodiche nelle loro espansione in frazioni continue.

Ci aspettiamo dunque che π possa essere sempre meglio approssimato da una frazione continua che contenga un numero sempre maggiore di termini ed eventualmente da una FCI.
Per porre il problema dello sviluppo di un numero trascendente in termini corretti, abbiamo bisogno di un certo numero di premesse.
La prima è solo di notazione, indicheremo infatti con

$$x = b_0 + K_{i=1}^{\infty}\,\frac{a_i}{b_i}$$

la frazione continua

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1+\frac{a_2}{b_2+\frac{a_3}{b_3+\ldots}}}$$

Chiameremo il simbolo $K_{i=1}^{\infty}$ () "fractoria" e notiamo che se il suo l'indice superiore è un valore finito otterremo una frazione parziale.
La seguente identità, detta *trasformazione di equivalenza*

$$x = b_0 + K_{i=1}^{\infty}\,\frac{a_i}{b_i} = b_0 + K_{i=1}^{\infty}\,\frac{\prod_{r=1}^{i} c_r\, a_i}{c_i\, b_i}$$

può essere dimostrata per induzione.
L'utilizzo della fractoria permette ad esempio di scrivere il rapporto aureo come

$$\phi = 1 + K_{i=1}^{\infty}\,\frac{1}{1}$$

La seconda premessa è la seguente identità dovuta ad Eulero

$$a_0\left(1+\sum_{m=1}^{n}\prod_{r=1}^{m}a_r\right)=K_{i=1}^{\infty}\frac{(-a_{i-1})}{1+a_{i-1}(1-\delta_{i-1,0})}$$

Che in forma estesa può essere scritta come

$$1+\sum_{i=1}^{n}a_1\ldots a_i=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{a_3}{\ldots}}}}$$

E' dunque evidente che qualsivoglia funzione analitica possa essere sviluppabile in frazioni continue.
Avremo infatti che nel caso della funzione esponenziale esprimibile come

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{z}{k}$$

Il suo equivalente sviluppo in frazione continua è

$$e^z=\cfrac{1}{1-\cfrac{z}{1+z-\cfrac{z/2}{1+z/2-\cfrac{z/3}{1+z/3-\ldots}}}}$$

L'utilizzo della trasformazione di equivalenza permette di ottenere l'espressione

$$e^z=\cfrac{1}{1-\cfrac{z}{1+z-\cfrac{z}{2+z-\cfrac{2\,z}{3+z-\ldots}}}}$$

Ponendo $z = 1$ otteniamo lo sviluppo del numero trascendente

$$e=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{4-\cfrac{3}{5\ldots}}}}}$$

Per quanto riguarda π possiamo ricavare il relativo sviluppo in FCI in maniera del tutto analoga, partendo dal seguente sviluppo in serie

$$\arctan(x)=x\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\prod_{s=1}^{r}a_s\,x^2\right),$$

$$a_s=-\frac{2\,s+1}{2\,s+3}$$

che, in termini di frazione continua, può essere scritto come (si esegua il calcolo esplicitamente, senza dimenticare di effettuare una trasformazione di equivalenza)

$$\arctan(x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3-x^2+\cfrac{9\,x^2}{5-3x^2+\cfrac{25\,x^2}{\ldots}}}}$$

ponendo $x = 1$ nell'equazione precedente, si ottiene l'espressione

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{\ldots}}}}$$

Ci siamo un po' allontanati dalle approssimazioni degli antichi, ma solo per solleticare l'appetito.

Capitolo IV

I “numeri immaginari”: solo una infelice dizione

■ 1 Il numero di Nepero e le funzioni ad esso associate

In questo capitolo introdurremo varie specie di numeri e in particolare forme generalizzate dei numeri complessi. Faremo riferimento ad una loro interpretazione geometrica; a tale scopo abbiamo bisogno di richiamare alcune nozioni concernenti il numero trascendente e, detto anche numero di Nepero, definito come

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2\ .71828\ ..$$

Possiamo comprendere la “natura” di questo numero (base dei logaritmi naturali) pensando al meccanismo della capitalizzazione: se si investe un certo capitale C ad un certo interesse annuo r dovremo aspettarci, dopo n anni un capitale pari a

$$C_n = (1+r)^n\, C$$

In particolare dopo un anno avremmo “guadagnato” $r\cdot C$.
Quanto avremo guadagnato se invece investiamo il nostro capitale ad un interesse giornaliero pari a $\frac{r}{365}$? Potremmo essere tentati di dire che è di nuovo $r\cdot C$, invece le cose non stanno così, infatti avremo

$$c = \left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} C \neq (1+r)\, C$$

Per comprendere a quanto ammonti il livello di “diversità”, notiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

poiché $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \cong e$ possiamo concludere che $c \cong e^r\, C$. Valore che tanto più si discosta da $(1+r)\, C$ quanto maggiore è il valore di r. Se r fosse il 100% la differenza sarebbe pari a $0.718\cdot C$.

La funzione esponenziale

$$y(x) = e^x$$

gode di un ruolo privilegiato nel calcolo perché è una “auto-funzione” dell’operatore derivata, ovvero

$$\frac{d}{d\,x}\, y(\lambda\, x) = \lambda\cdot y(\lambda\, x)$$

Da ciò segue anche che il suo sviluppo in serie di potenze è esprimibile come

$$e^{\lambda\, x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\, x)^n}{n!}$$

La funzione esponenziale è inoltre è legata alle funzioni trigonometriche tramite le relazioni di Eulero

$$\cos(x) = \frac{e^{i\,x}+e^{-i\,x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, x^{2\,n}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{i\,x}-e^{-i\,x}}{2\,i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, x^{2\,n+1}$$

e alle funzioni iperboliche da

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2\,n)!}\, x^{2\,n}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2\,n+1)!}\, x^{2\,n+1}$$

che abbiamo riportato insieme al relativo sviluppo in serie di potenze.
Entrambe hanno un preciso significato geometrico, che descriveremo nel seguito (con i abbiamo indicato l’unità immaginaria caratterizzata dalla proprietà $i^2 = -1$).

■ 2 Numeri “immaginari” e/o “complessi”: solo un (infelice) modo di dire

Nel capitolo precedente abbiamo insistito sulla seguente identità

$$x^2 = a + b\, x$$

che si è rivelata meno banale di quanto si potesse pensare. Stante così le cose si può provare ad attribuire ai “numeri” x, che soddisfano la relazione precedente, lo status di numeri particolari, che diremo numeri Q.[21]

Dalla relazione precedente si ottiene, ad esempio (moltiplicando ambo i membri per x)

$$x^3 = a\,x + b\,x^2 = a\,x + b\,(a + b\,x) = a_1 + b_1\,x \implies \begin{cases} a_1 = a\,b \\ b_1 = a + b^2 \end{cases}$$

Possiamo ora generalizzare, per induzione, la relazione precedente in modo da ottenere che qualsiasi potenza di x sia esprimibile tramite la seguente combinazione lineare

$$x^n = a_{n\text{-}2} + b_{n\text{-}2}\,x$$

I coefficienti a_n, b_n possono essere derivati, per induzione, dalla equazione di partenza. Ponendo, infatti, $a_0 = a$, $b_0 = b$, se si moltiplicano ambo i membri della relazione di partenza per x, otteniamo la seguente espressione

$$x^3 = a_0\ x + b_0\,x^2 = a_1 + b_1\,x$$
$$b_1 = a_0 + b_0^2,\ a_1 = a_0\,b_0$$

che, iterata alla potenza successiva, fornisce l'identità

$$x^4 = a_2\ + b_2\,x$$
$$b_2 = b_1\,b_0 + a_1$$
$$a_2 = b_1\,b_0$$

Procedendo oltre si inferisce che a_n, b_n sono specificati dalle seguenti ricorrenze

$$b_n = b_{n\text{-}1}\,b_0 + a_{n\text{-}1}$$
$$a_n = b_{n\text{-}1}\,a_0$$

Il risultato ottenuto è molto importante perché ha messo in evidenza l'esistenza di forme generalizzate dei numeri immaginari. Infatti, se si pone $x^2 = -1$ nell'equazione di partenza si ottengono, tramite l'utilizzo delle relazioni di ricorrenza, le ben note regole algebriche delle potenze successive della unità immaginaria.
In base a tale punto di vista il numero razionale $\frac{5}{2}$, che soddisfa l'identità

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = a + b\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$a = \frac{5}{4}$$
$$b = 2$$

risulta non meno "immaginario" dell'unità immaginaria stessa. E' evidente che in tale contesto la nozione di "immaginario" perde un po' del suo significato mistico poiché questa viene associata alla struttura algebrica delle equazioni ad esso associate. In altre parole, per quanto riguarda l'unità immaginaria "classica" ovvero $i^2 = x^2 = -1$, avremo che si tratta di un caso particolare di un numero Q con $a = -1$ e $b = 0$, infatti

$$-1 = a + b\,x\ = 0 + (-1)\,x$$

Non è pertanto azzardato concludere che la definizione di numeri immaginari e/o complessi è un modo di dire per indicare classi di numeri che soddisfino una equazione di secondo grado. Si può quindi affermare che tutti i numeri sono immaginari, almeno nel senso generalizzato che abbiamo testé definito.
Come ogni numero complesso che si rispetti anche i Q-numeri hanno un coniugato. Poiché i numeri Q sono associati ad una equazione di secondo grado avremo due possibili numeri Q, che soddisfano la medesima equazione

$$Q_+\,(a,\,b) = \frac{b+\sqrt{b^2+4\,a}}{2}$$
$$Q_-\,(a,\,b) = \frac{b-\sqrt{b^2+4\,a}}{2}$$

Con le seguenti proprietà (il simbolo * rappresenta l'operazione di coniugazione)

$$(Q_+\,(a,\,b))^* = Q_-\,(a,\,b)$$
$$Q_+\,(a,\,b)\,Q_-\,(a,\,b) = -a$$
$$Q_+\,(a,\,b) +\ Q_-\,(a,\,b) =\ b$$
$$Q_+\,(a,\,b)\ -\ Q_-\,(a,\,b) = \sqrt{b^2 + 4\,a}$$

La sezione aurea, introdotta nel capitolo precedente è un numero Q, infatti

$$\varphi = Q_+\,(1,\ 1)$$

Come è noto, i numeri complessi convenzionali hanno una ben precisa interpretazione geometrica e sono associati alle rotazioni nel piano. Le potenze successive dell'unità immaginaria possono essere visualizzate in un piano in cui sull'asse *x* vengono riportati i numeri reali e sull'asse *y* quelli complessi, secondo quanto illustrato nella figura successiva. Essa riproduce essenzialmente la seguente corrispondenza in forma di tabella di moltiplicazione

```
1        →  (1,0)
i·1      →  (0,1)
i·i      →  (-1,0)
i·i·i    →  (0,-1)
i·i·i·i  →  (1,0)
```

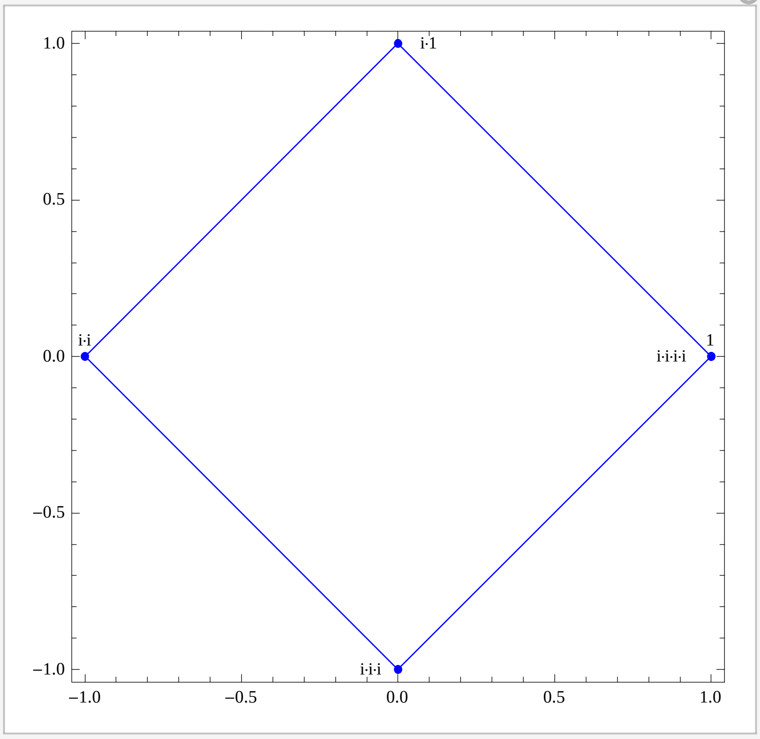


Fig. 28: rappresentazione geometrica delle potenze successive dell'unità immaginaria.

Possiamo definire un analogo piano in cui sull'asse delle *x* vengono riportati i numeri "reali" e su quello delle *y* i numeri *Q*. Se riportiamo su questo piano le potenze successive del rapporto aureo avremo la seguente tabella moltiplicativa

1	$\to$	$(1,0)$
$\varphi\cdot 1$	$\to$	$(0,\varphi)$
$\varphi\cdot\varphi$	$\to$	$(1,\varphi)$
$\varphi\cdot\varphi\cdot\varphi$	$\to$	$(1,2\varphi)$
$\varphi\cdot\varphi\cdot\varphi\cdot\varphi$	$\to$	$(2,3\varphi)$
	..	
φ^n	$\to$	$(F_{n-1},\ F_n\,\varphi)$

che, a differenza del caso dell'unità immaginaria, non ha un comportamento ciclico[22], ma quello di una spezzata che tende alla retta di equazione

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}\,\varphi\, x = \varphi^2\, x$$

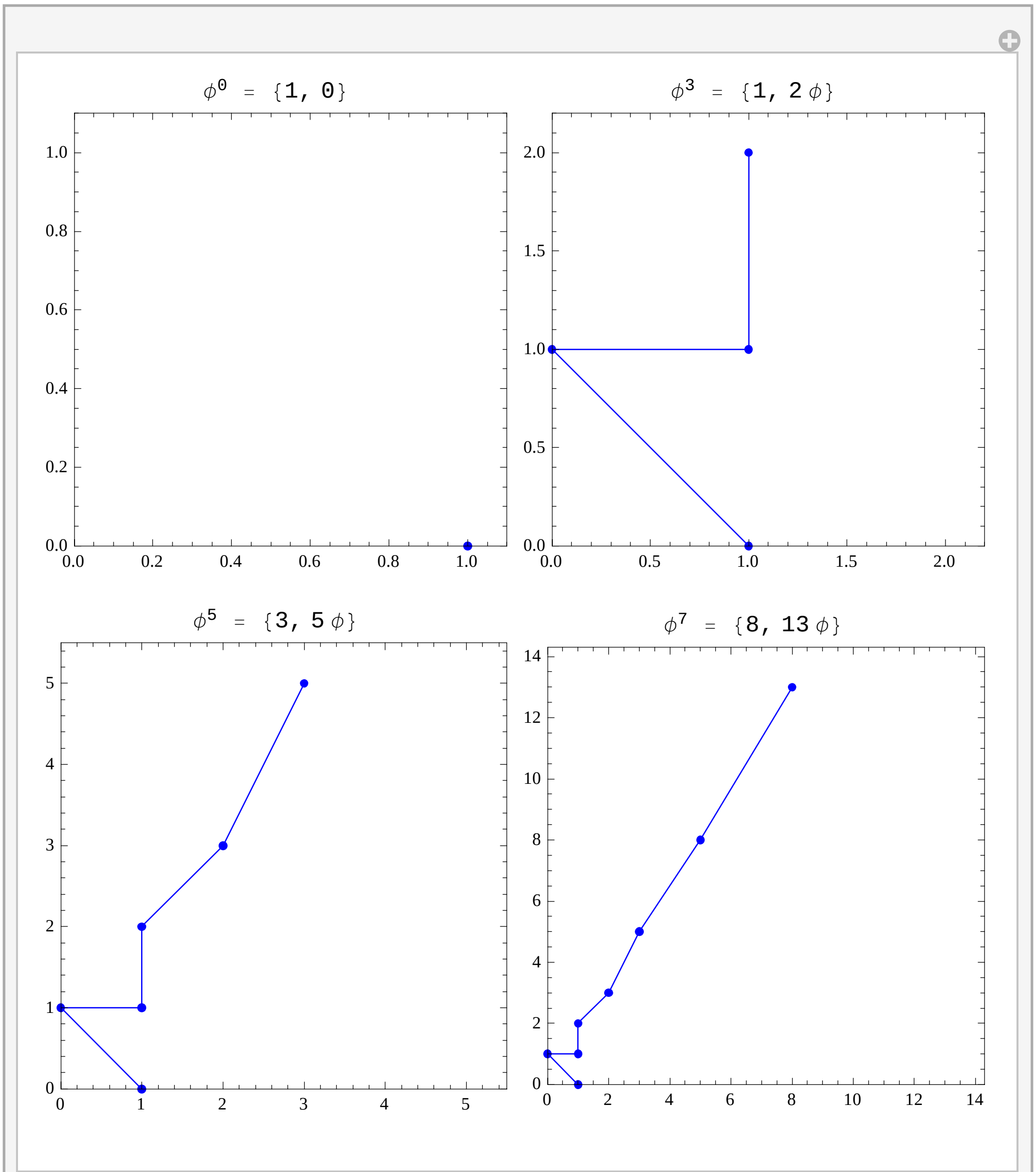


Fig. 29: rappresentazione geometrica delle potenze successive dei numeri di Fibonacci (con ϕ=1).

Un analogo comportamento è ravvisabile nel caso dei numeri Q associati alla sezione argentea, come riportato nella figura seguente (numeri di Pell)

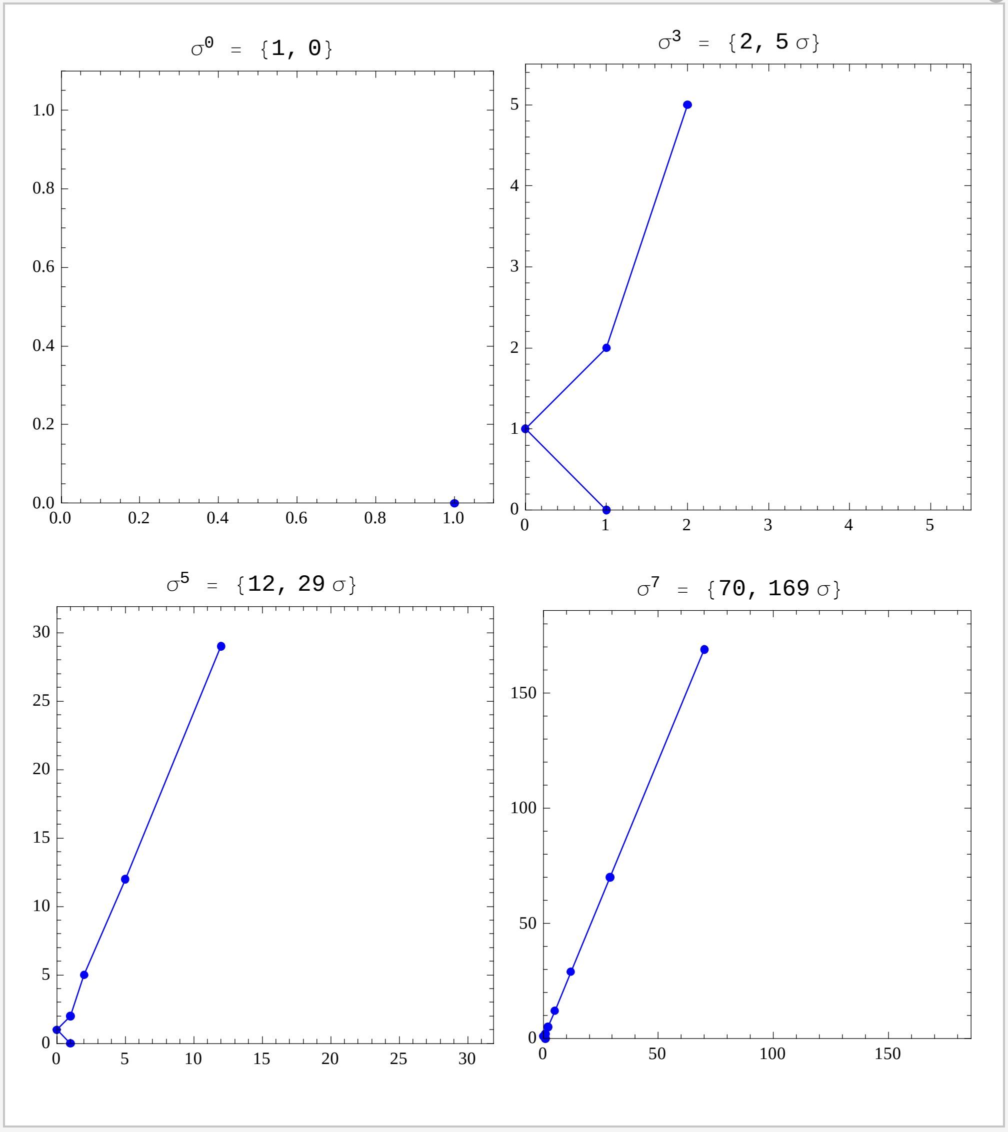


Fig. 30: rappresentazione geometrica delle potenze successive dei numeri associati alla sezione argentea (con σ=1).

Non è evidentemente possibile fornire per tutti i numeri Q una interpretazione geometrica, che implichi la possibilità di associarli a rotazioni in un piano bi-dimensionale.

Per comprendere quale sia il ruolo geometrico che caratterizza tali numeri è necessaria qualche ulteriore riflessione.

■ 3 Matrici: numeri a più dimensioni

E' con un certo fastidio formale che abbiamo scritto la tabella di moltiplicazione per i numeri immaginari. La ragione per cui la tabella appare (formalmente) incoerente deriva dal fatto che abbiamo introdotto l'unità immaginaria operante su coppie di numeri che definiscono i punti di un piano. Per poter eseguire tali operazioni in maniera meno farraginosa è necessario dotarsi di uno strumentario più adeguato. Se definiamo la seguente matrice 2×2

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

scopriamo che si tratta di una unità immaginaria, almeno secondo la definizione corrente, visto che il suo quadrato fornisce la matrice unitaria $\hat{1}$ con segno cambiato, ovvero

$$\hat{i}^2 = -\hat{1}$$

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se inoltre si specifica una coppia di numeri nel piano complesso come

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

abbiamo risolto tutti i problemi (formali), dal momento che vale la relazione

$$\hat{i} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

e che dunque l'"applicazione" successiva della matrice su un numero con parte immaginaria nulla, fornisce il seguente risultato

$$\hat{i} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{i}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{i}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{i}^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ritornando alla definizione di numero immaginario come Q-numero con $a = -1$ e $b = 0$, potremmo azzardare l'ipotesi che ad ogni Q-numero sia associata la seguente matrice

$$\hat{q}\,(a\,,\,b) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Come utile esercizio si può dimostrare che vale la seguente identità

$$\hat{q}\,(a\,,\,b)^2 = a\,\hat{1} + b\,\hat{q}\,(a,\,b)$$

che costituisce una prova che l'ipotesi fatta è corretta. E' anche evidente che iterando l'operazione di elevamento a potenza si ottiene

$$\hat{q}\,(a\,,\,b)^n = a_{n-2}\,\hat{1} + b_{n-2}\,\hat{q}\,(a,\,b)$$

A questo punto, per completare il discorso, è necessario introdurre l'analogo dei numeri complessi, che saranno definiti in maniera analoga a quelli convenzionali, nel presente contesto la parte "immaginaria" viene espressa in unità del numero

$$Q_+\,(a\,,\,b)$$

La matrice caratteristica dei numeri Q ha proprietà degne di nota. Si può ad esempio verificare, per induzione, che

$$\hat{q}\,(1\,,\,1)^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Poiché il determinate del prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti delle matrici, avremo che

$$|\,\hat{q}\,(a\,,\,b)^n\,| = |\,\hat{q}\,(a\,,\,b)\,|^n = a^n$$

da cui discende la seguente proprietà dei numeri di Fibonacci

$$|\,\hat{q}\,(1,\,1)\,|^n = \left|\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}\right| = F_{n-1}\,F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Analoghe conclusioni valgono per i numeri di Pell generati da $\hat{q}(1,\,2)^n$.

Siamo a questo punto in grado di arguire che l'azione successiva della matrice caratteristica di un Q-numero su un vettore dello spazio Q-complesso. Partendo da un vettore, giacente sull'asse reale, la seguente operazione

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \hat{q}\,(a\,,\,b)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definisce un vettore nello spazio Q-complesso, con un angolo di inclinazione pari a

$$\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \tan^{-1}\!\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

L'interpretazione che abbiamo proposto in merito al significato geometrico dei Q-numeri ha un precedente, forse poco noto, che risale al 1897 quando Felix Klein propose una interpretazione geometrica delle frazioni continue. L'idea di

Klein[23] può essere riassunta come segue:
data la frazione continua $[a_1,\ a_2,\ a_3,\ ..,\ a_n,\ ..]$ che definisce lo sviluppo di un numero irrazionale α, con ridotte $c_i = \frac{p_i}{q_i}$, se si costruisce un piano (q, p) in cui vari punti vengono individuati tramite le $(q_1,\ p_1),\ (q_2,\ p_2),\ (q_3,\ p_3)$ ..., si scopre che in tale piano la retta con pendenza α "interpolerà" i punti prima definiti.
Prima di procedere oltre riteniamo opportuno far notare che ogni matrice 2×2 si può scrivere come il prodotto di due Q-matrici, ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \hat{q}\,(a,\,c)\ \hat{q}\left(\frac{a\,d - b\,c}{a},\ \frac{b}{a}\right)$$

la cui importanza sarà discussa nel seguito.

4 *Q*-Trigonometria

Si impone ora un po' di astrazione se si vuole penetrare più a fondo la discussione fino ad ora sviluppata. Saremo, pertanto, costretti a ricordare qualche nozione che va un po' al di là di quelle elementari.
Il *modulo* di un ordinario numero complesso si definisce come il prodotto del numero stesso per il suo complesso coniugato.
Da un punto di vista geometrico il modulo rappresenta la lunghezza del vettore associato al numero stesso, nel piano di Gauss-Argand (l'ordinario piano complesso). Un numero Q-complesso e il suo coniugato sono specificati da

$$Z = X + Q_+\,Y$$
$$Z^* = X + Q_-\,Y$$

Inoltre definiremo le parti Q-reale e Q-immaginarie di Z come

$$_Q\mathrm{Re}\,(Z) = \frac{Q_+\,Z^* - Q_-\,Z}{2\sqrt{\Delta}} = X$$
$$_Q\mathrm{Im}\,(Z) = \frac{Z - Z^*}{2\sqrt{\Delta}} = Y$$

Il modulo di un numero Q-complesso è dato da

$$_Q\left|Z^2\right| = Z\cdot Z^* = X^2 - a\,Y^2 + b\,X\,Y$$

mentre quello associato alla somma di due Q-numeri è

$$_Q|Z_1 + Z_2| = {}_Q\left|Z_1^2\right| + {}_Q\left|Z_2^2\right| + 2\sqrt{\Delta}\cdot{}_Q\mathrm{Re}\,(Z_1\,Z_2^*)$$

L'analogia con il caso ordinario è forte, e la si può ulteriormente rinforzare.
La formula di Eulero

$$e^{i\,\delta} = \cos(\delta) + i\sin(\delta)$$
$$e^{-i\,\delta} = \cos(\delta) - i\sin(\delta)$$

può essere estesa ai numeri Q, utilizzando la seguente generalizzazione

$$e^{Q_+\,\delta} = \cdot\,{}_QC\,(\delta) + Q_+\cdot{}_QS\,(\delta)$$
$$e^{Q_-\,\delta} = \cdot\,{}_QC\,(\delta) + Q_-\cdot{}_QS\,(\delta)$$

Le funzioni $_QC\,(\delta)$ e $_QS\,(\delta)$ sono a loro volta una estensione delle ordinarie funzioni coseno e seno e, in termini di esponenziali, sono esprimibili come

$$_QC\,(\delta) = \frac{Q_+\,e^{Q_-\,\delta} - Q_-\,e^{Q_+\,\delta}}{2\sqrt{\Delta}}$$
$$_QS\,(\delta) = \frac{e^{Q_-\,\delta} - e^{Q_+\,\delta}}{2\sqrt{\Delta}}$$

e nel seguito saranno dette funzioni Q-trigonometriche. Nella figura seguente viene riportato il relativo andamento nel piano Q-complesso. Per valori negativi di a e $b = 0$ le funzioni sono essenzialmente le ordinarie funzioni trigonometriche, mentre per $b > 0$, si discostano da queste descrivendo una sorta di spirali logaritmiche. Per valori positivi di a l'andamento ricorda quello delle funzioni trigonometriche iperboliche.
La relazione "fondamentale" tra le funzioni Q-trigonometriche è la seguente

$$\left[{}_QC(\delta)\right]^2 + b\left[{}_QC(\delta)\right]\left[{}_QS(\delta)\right] - a\left[{}_QS(\delta)\right]^2 = e^{b\,\delta}$$

ottenuta tramite il prodotto $e^{Q_+\,\delta}\,e^{Q_-\,\delta}$, che è ovviamente un caso più generale delle ordinaria relazione tra funzioni circolari e iperboliche.
E' evidentemente possibile introdurre l'analogo della funzione tangente, ovvero

$${}_QT(\delta) = \frac{{}_QS(\delta)}{{}_QC(\delta)}$$

cui le funzioni "coseno " e "seno" sono legate tramite l'identità

$${}_QS(\delta) = \frac{e^{\frac{b}{2}\delta}}{\sqrt{[{}_QT(\delta)]^2 + b\,{}_QT(\delta) - a}},$$

$${}_QC(\delta) = \frac{e^{\frac{b}{2}\delta}\,{}_QT(\delta)}{\sqrt{[{}_QT(\delta)]^2 + b\,{}_QT(\delta) - a}},$$

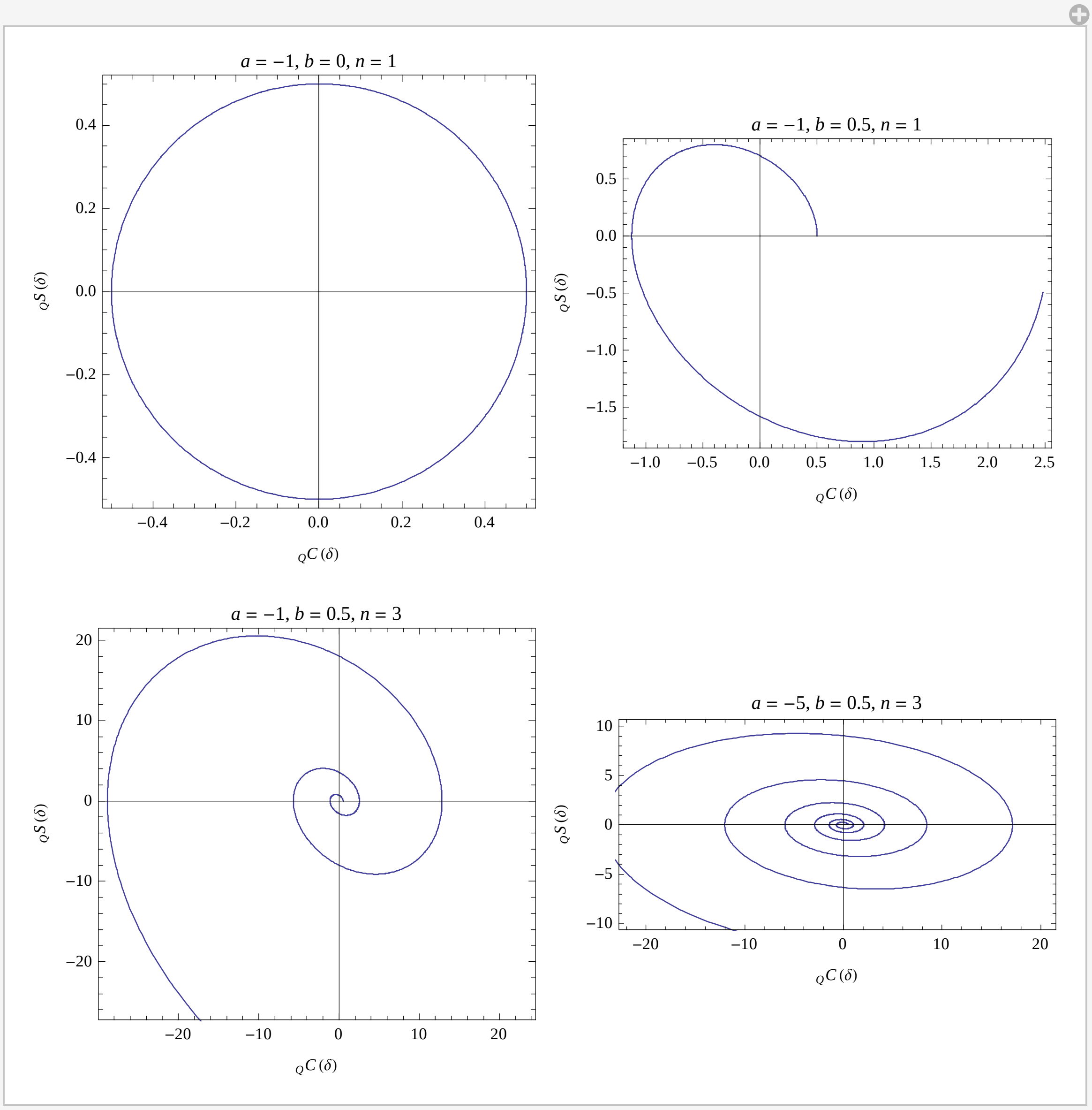


Fig. 31: rappresentazione Q–trigonometrica.

Desideriamo chiudere questo paragrafo attirando l'attenzione su un punto che riteniamo importante.
Se si considera il fatto che $\hat{q}\,(a\,,\,b)^n = a_{n\text{-}2}\,\hat{1} + b_{n\text{-}2}\,\hat{q}\,(a,\,b)$ è anche evidente che

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} \hat{q}(a, b)^n = \hat{1} + \delta \hat{q}(a, b) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} \left[a_{n-2} \hat{1} + b_{n-2} \hat{q}(a, b)\right]$

da cui segue la definizione delle funzioni Q-trigonometriche in termini di serie

$_QC(\delta) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{m+2}}{(m+2)!} \delta^{m+2}$,

$_QS(\delta) = \delta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{m+2}}{(m+2)!} \delta^{m+1}$

Una ulteriore annotazione che riteniamo utile è la seguente: nel definire l'unità immaginaria in termini di matrici abbiamo introdotto la matrice $\hat{i}$ il cui quadrato è proprio la matrice unità con il segno cambiato. L'aver introdotto l'uso delle matrici offre qualche vantaggio in termini di chiarezza di notazione, ma anche di possibilità di estensione di alcuni concetti. Se si introduce infatti la matrice

$\hat{h} = \hat{q}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

è possibile definire una ulteriore unità "immaginaria", caratterizzata dalla proprietà

$\hat{h}^2 = \hat{1}$

che sarà detta unità (immaginaria) iperbolica, come segue dalla relazione

$e^{\hat{h}\delta} = \cosh(x)\,\hat{1} + \hat{h} \sinh(x)$

Le funzioni iperboliche, al pari di quelle circolari, sono dunque un caso particolare delle Q-funzioni.

■ 5 E allora?

E' legittimo chiedersi "…e allora cosa c'entra tutta questa discussione con quella fatta nei capitoli precedenti e in particolare con quella sviluppata nel primo e nel secondo ?"
I ragionamenti che hanno condotto a questo capitolo sono stati motivati dal tentativo di trovare un filo conduttore tra operazioni aritmetiche, numeri razionali, frazioni continue, numeri irrazionali e una concezione un poco più generale dei numeri complessi, che includa quella degli irrazionali quadratici ridotti.
Uno spunto "esoterico-geometrico" per collegare quanto discusso in questo capitolo con quelli precedenti è la seguente osservazione: dati quattro numeri di Fibonacci consecutivi F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, le seguenti combinazioni

$F_n F_{n+3}$, $2 F_{n+1} F_{n+2}$, $F_{n+2} F_{n+3} - F_n F_{n+1}$

realizzano una terna Pitagorica, ovvero

$(F_n F_{n+3})^2 + 4 (F_{n+1} F_{n+2})^2 = [F_{n+2} F_{n+3} - F_n F_{n+1}]^2$

Ho tenuto a sottolineare che, molto spesso in ambito divulgativo, si trovano speculazioni assolutamente poco attendibili sui numeri di Fibonacci e su pretesi loro significati esoterici. In un libro di qualche anno fa[24] veniva fatta l'asserzione che la sezione aurea fosse il "il più irrazionale dei numeri", tale affermazione è priva di qualsiasi fondamento matematico.[25]
Da quanto discusso è infatti evidente che tutti gli irrazionali quadratici sono equivalenti, da un punto di vista matematico, e dunque nessuno di questi ha una posizione privilegiata nel relativo empireo.
Qualsiasi successione del tipo

$G_0 = 0$
$G_1 = 1$
$G_{n+2} = y\, G_{n+1} + G_n$,

dà luogo ad un "rapporto aureo", definito come

$\varphi(y) = \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$

caratterizzato dalla proprietà

$[\varphi(y)]^{-1} = \varphi(-y) = 1 - \varphi(y) = -[\varphi(y)]^*$

formalmente interessante per la sua analogia con i numeri immaginari ordinari, tanto da suggerire l'introduzione delle Q-Trigonometrie, tramite la generalizzazione della relazione di Eulero. Inoltre se si considera il parametro y intero si otterrà una successione di numeri del tutto simile, almeno da un punto di vista matematico, ai numeri di Fibonacci
In base alla già citata formula di Binet è possibile definire la successione $G_n(y)$ come

$$G_n(y) = \frac{[\varphi(y)]^n + [\varphi(y)^*]^n}{\sqrt{4+y^2}}$$

le cui proprietà sono particolarmente attraenti e semplici da studiare. I numeri di Fibonacci sono dunque un caso particolare di tale successione quando $y = 1$.

E' altresì importante notare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(y) = \frac{1}{\sqrt{4+y^2}}\left[\frac{1}{1+t\left(y+\sqrt{4+y^2}\right)} + \frac{1}{1+t\left(y-\sqrt{4+y^2}\right)}\right] = \frac{2}{\sqrt{4+y^2}}\left[\frac{1+y\,t}{1+2\,y\,t-4\,t^2}\right]$$

Infine associando alla funzione $G_n(y)$ la seguente forma coniugata

$$S_n(y) = \frac{[\varphi(y)]^n - [\varphi(y)^*]^n}{\sqrt{4+y^2}}$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n S_n(y) = \frac{1}{\sqrt{4+y^2}}\left[\frac{1}{1+t\left(y+\sqrt{4+y^2}\right)} - \frac{1}{1+t\left(y-\sqrt{4+y^2}\right)}\right] = 2\left[\frac{1}{1+2\,y\,t-4\,t^2}\right]$$

Il metodo appena utilizzato è quello della funzione generatrice, di cui parleremo più diffusamente nel seguito. Grazie a tale tecnica abbiamo individuato una funzione nella variabile t che "genera" $S_n(y)$ e $G_n(y)$ come i coefficienti del suo viluppo in serie di Taylor.

Le funzioni generatrici, testé ottenute, sono a loro volta associabili ad una "nobile" famiglia di polinomi nota come polinomi di Chebyshev (ahi!!! abbiamo aderito al partito di translitterazione anglosassone) e definiti come

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1-t\,x}{1-2\,t\,x+t^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x) = \frac{1}{1-2\,t\,x+t^2}$$

Se si confrontano le funzioni generatrici dei polinomi di Chebyshev con quelle precedenti avremo, come semplice conseguenza del principio di identità dei polinomi[26], le seguenti relazioni

$$S_n(y) = 2^{n+1}\, i^n\, U_n\!\left(-i\,\frac{y}{2}\right)$$

$$G_n(y) = \frac{2^{n+1}\, i^n}{\sqrt{4+y^2}}\, T_n\!\left(-i\,\frac{y}{2}\right)$$

I numeri di Fibonacci sono dunque dati da

$$F_n = \frac{2^{n+1}\, i^n}{\sqrt{5}}\, T_n\!\left(-i\,\frac{1}{2}\right)$$

Cosa stiamo tentando di comunicare?

In ambito divulgativo (e non solo) esiste il diffuso atteggiamento di attribuire agli F_n e al rapporto aureo una posizione privilegiata con asserzioni del tipo che essi sono onnipresenti praticamente in ogni campo che abbia a che fare con qualche rapporto numerico (Fisica, Biologia, Architettura, Anatomia…) e sottointendono una sorta di codice segreto di cui ϕ è la chiave di decifrazione.

Quello che pacatamente teniamo a sottolineare è che i numeri di Fibonacci, il rapporto aureo e quant'altro ad essi collegato non ha alcun significato recondito, nessuna valenza "vedica" e che tutte le speculazioni ad essa collegate sono mere illazioni frutto di ingiustificate speculazioni, spesso autoreferenziali, la seguente citazione è molto illuminante

"…Per documentare tutte le informazioni errate sul rapporto aureo sarebbe necessario un libro molto voluminoso, molte di queste sono il frutto degli stessi errori perpetrati da autori diversi"

Gli entusiastici sostenitori dei codici ispirati ad antiche sapienze citano inconfutabili prove come quella riportata nella figura seguente, che mostra un disegno attribuito a Leonardo[27]: i rettangoli sovraimposti (dall'artista) riguardavano probabilmente uno studio delle relative proporzioni, ma si sostiene che si tratta di rettangoli aurei, senza tener alcun conto delle relative lunghezze.

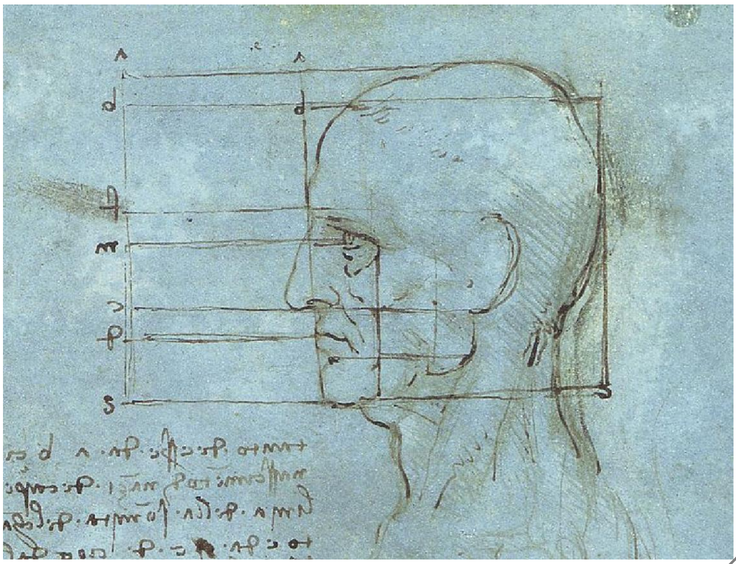


Fig. 32: proporzioni della testa
(immagine di pubblico dominio, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bd/Proportions_of_the_Head.jpg).

Ora, per riconciliare la discussione di questo capitolo con quella dei capitoli precedenti, consideriamo un numero $r > 1$ e poniamo $p = r - \frac{1}{r}$, da cui segue $r^2 = rp + 1$ (se $p = 1$ avremo $r = \phi$); associamo ora $rp + 1$ a quanto mostrato nella figura seguente, ovvero il diametro BC di una semicirconferenza, e costruiamo il triangolo rettangolo inscritto in essa in cui rp e 1 siano le proiezioni dei relativi cateti sull'ipotenusa.

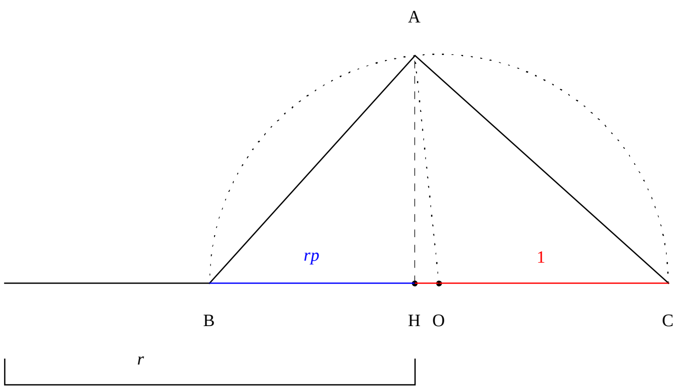


Fig. 33: costruzione del triangolo di Keplero.

Dalla figura arguiamo che

1. in base al secondo teorema di Euclide BH:AH = AH:CH e quindi $\overline{AH} = \sqrt{r\,p}$ (questo era il modo dei greci di eseguire le radici quadrate!!!);
2. l'ipotenusa del triangolo rettangolo è $\overline{BC} = rp + 1 = r^2$ e se $p = 1$ avremo $\overline{BC} = \phi^2$

Anche in questo capitolo abbiamo seguito una sorta di viaggio che ci ha permesso di andare dall'algebra alla geometria, utilizzando la nozione di unità immaginaria che abbiamo provato a visualizzare in un contesto più ampio. Il mondo dei polinomi e dei numeri ad essi associati riserva però tante altre sorprese che proveremo a scoprire nel prossimo capitolo.

Come ultima nozione pratica cerchiamo di ricavare dalle considerazioni precedenti un "regolo" (probabilmente quello utilizzato dai greci) per il calcolo delle radici quadrate.

Supponiamo dunque di voler calcolare $\sqrt{3}$ con riga e compasso. Prendiamo un segmento BC di lunghezza $4 = 3 + 1$ e su questa segniamo un segmento di HC di lunghezza 1 e BH di lunghezza 3. Costruiamo la perpendicolare al segmento BC in H e tracciamo la semicirconferenza di diametro BC. A è il punto di incontro tra la semicirconferenza e la perpendicolare: AC è la radice di 3.

Concludiamo con un ulteriore strumento (geometrico) di calcolo per la determinazione di quantità associate al rapporto aureo. L'utilizzo della identità $\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} = 1$, permette di ottenere quanto mostrato nella successiva figura in cui viene riportato un cerchio di raggio 1/2 e la tangente parallela al rettangolo tangente di lati 1/2 e 1.

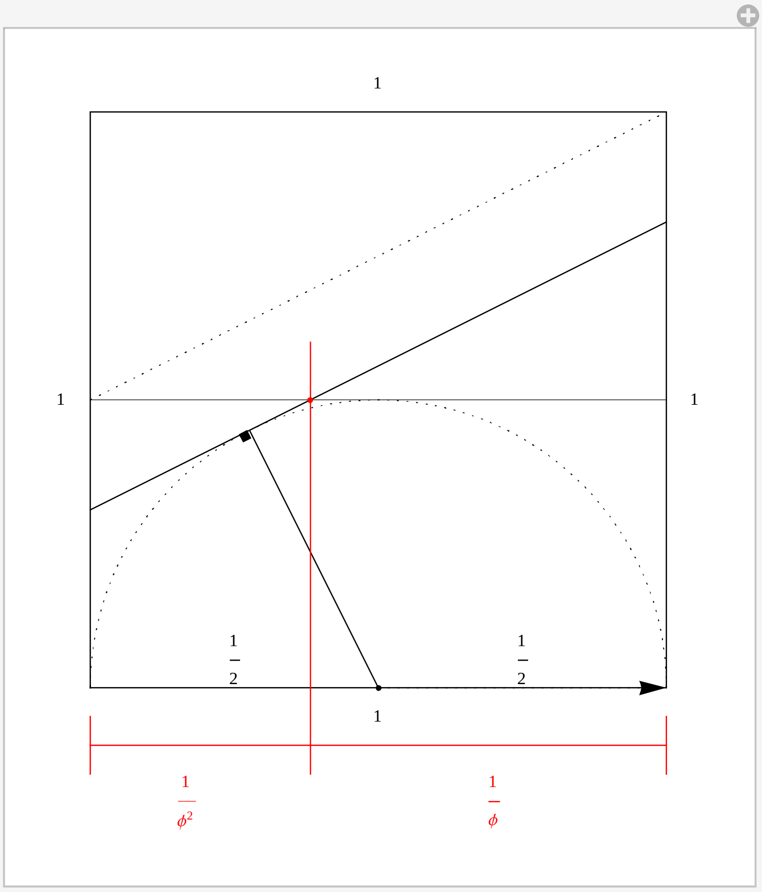


Fig. 34: regolo "geometrico" per il calcolo dei numeri irrazionali $\frac{1}{\phi^2}$ e $\frac{1}{\phi}$.

6 Polinomi di terzo grado

Prima di considerare i problemi relativi ai polinomi e ai numeri complessi, proviamo a rimettere i piedi per terra ponendoci il problema di come risolvere l'equazione

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x = c$$

Poiché abbiamo raggiunto un certo livello di indipendenza di pensiero, possiamo anche ritenere che il calcolo di x sia equivalente all'estrazione di un tipo generalizzato di "radice" del numero c, ovvero del termine noto della nostra equazione. Indicheremo tale operazione con

$$x = \sqrt[(3,\,2_a,\,1_b)]{c}$$

è evidente che nel caso di $a = b = 0$ tutto si riduce a

$$\sqrt[(3,\,2_0,\,1_0)]{c} = \sqrt[3]{c}$$

Limitandoci, per il momento ad un calcolo approssimato, faremo ricorso alle nostre tecniche immorali, che ci hanno aiutato per la definizione dell'algoritmo di calcolo della radice cubica ordinaria.
Se riscriviamo la precedente equazione cubica come

$y = \frac{c+(2\,x-a)\,x^2}{b+3\,x^2}$,

$y = x$

L’algoritmo iterativo che ne scaturisce è il seguente

$x_{n+1} = \frac{c+(2\,x_n-a)\,x_n^2}{b+3\,x_n^2}$,

$x_0 = k$

e nella figura seguente abbiamo riportato un esempio di “convergenza” del metodo.

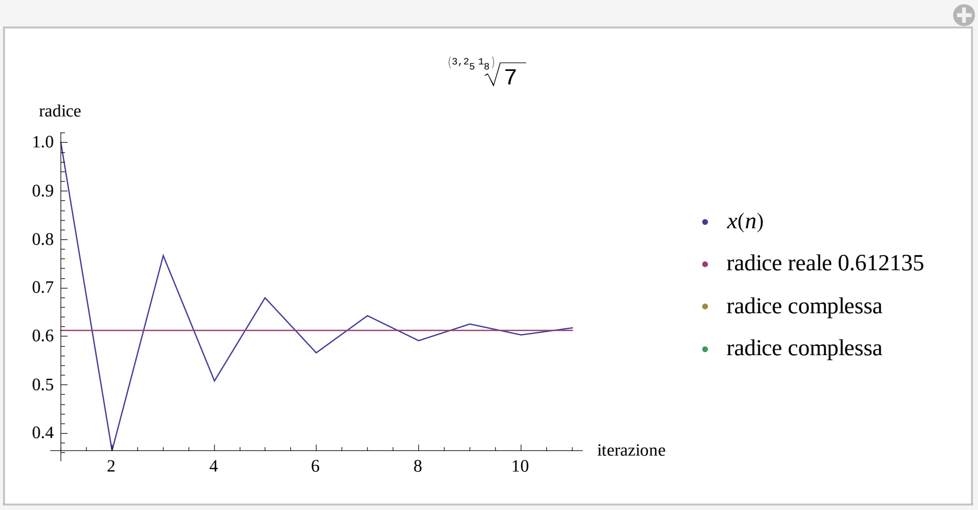


Fig. 35: calcolo di ultraradicali (di terzo ordine) con procedura iterativa e $x_0 = 1$.

Al pari delle equazioni di secondo grado, le soluzioni di una equazione cubica non sono uniche e come sappiamo sono 3, legate ai coefficienti stessi dell’equazione dalle relazioni

$x_1 + x_2 + x_3 = -a$,

$x_1\,x_2\,x_3 = c$

Indicando con la soluzione fornita dall’algoritmo iterativo, otteniamo che le restanti radici possono essere ottenute tramite l’equazione di secondo grado

$X^2 + (a + y)\,X + \frac{c}{y} = 0$

Cosicché in conclusione avremo

$$ {}^{(3,\,2_a\,,1_b)}\sqrt{c} \;=\; \begin{cases} y \\ \dfrac{-(a+y)+\sqrt{(a+y)^2-\frac{4\,c}{y}}}{2} \\ \dfrac{-(a+y)-\sqrt{(a+y)^2-\frac{4\,c}{y}}}{2} \end{cases} $$

Consideriamo ora l’equazione di quarto grado

$x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x = d$

La cui soluzione sarà indicata come

$x = {}^{(4,\,3_a\,,2_b\,,1_c)}\sqrt{d}$

applicando lo stesso criterio precedente potremo ottenere la seguente procedura iterativa per il calcolo di una delle soluzioni del nostro problema

$x_{n+1} = \frac{d+(3\,x_n^2-a\,x_n-b)\,x_n^2}{c+4\,x_n^3}$,

$x_0 = k$

Le ulteriori radici sono ottenibili operando come nel caso dell'equazione che abbiamo discusso in merito all'equazione di terzo grado. Ma di questo diremo meglio nel prossimo capitolo.
E' evidente che l'estensione della procedura ad una equazione di grado maggiore, non presenta, almeno dal punto di vista concettuale, alcun problema.
Il metodo che abbiamo descritto è (nelle sue linee essenziali) un caso particolare di una tecnica più generale per la soluzione di equazioni non lineari nota come algoritmo di Newton (Raphson).
Abbiamo tenuto a citare questa procedura, prima del prossimo capitolo in cui paleremo di equazioni algebriche di grado 2,3,4 e di grado superiore, per due ragioni.
La prima è legata alla procedura logica che abbiamo seguito, abbiamo fatto dipendere la soluzione dell'equazione grado *n* da quella di grado *n*-1 che, come vedremo, è stato il principio ispiratore per la ricerca della formula risolutiva delle equazioni di grado superiore al primo.

La seconda è che i Babilonesi avevano forse intuito il senso di "radici" del tipo $\sqrt[(3,\, 2_a,1_8)]{c}$, disponevano infatti di tabelle relative al calcolo di $n^3 + n^2$ utili per l'estrazione di "radici" $\sqrt[(3,\, 2_a,1_0)]{c}$, la qual cosa dimostra l'elevato livello di astrazione cui erano giunte le civiltà del passato.
Prima di chiudere, torniamo al "numero complesso" definito dalla relazione $x^2 = a + b\,x$, che, nell'ambito del formalismo suggerito in questo paragrafo, può essere interpretato come $h = \sqrt[(2,1_{-b})]{a}$.
Nei prossimi capitoli trarremo ulteriori conseguenze da questo diverso punto di vista, non solo di notazione.

Capitolo V

Equazioni algebriche: il punto di vista vedico e quello occidentale

1 Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo visto come il concetto di numero immaginario sia così intrinsecamente legato alle nozione di equazione algebrica ed alla loro struttura che la nozione stessa di numero immaginario acquista un significato affatto diverso, diventando solo una definizione alternativa all'equazione medesima. Volendo trattare il problema in termini appropriati dovremmo far riferimento alla teoria di Galois e introdurre il concetto di numeri coniugati di Galois, che permetterebbero una collocazione rigorosa dei problemi di cui si sta discutendo. Dati, però, gli interessi e gli scopi della presente discussione una digressione di tale tipo sarebbe del tutto inappropriata.
Nel corso del precedente capitolo abbiamo tenuto a mettere in evidenza come la locuzione "immaginario", utilizzata per definire i numeri che non siano reali, sia infelicemente fuorviante. Visto il rigore che ispira le pagine di questo libro vorremmo ora sostenere il contrario, per motivi storici e non solo.
Sebbene la soluzione delle equazioni di secondo grado risalga, come abbiamo visto, agli Assiri che scoprirono il metodo oggi detto del *complemento al quadrato*, la nozione di numero immaginario nasce qualche millennio dopo, ad opera degli algebristi italiani, impegnati nello studio delle equazioni di terzo grado.
In particolare, nel libro I dell'*Algebra*, Rafael Bombelli introduce le radici quadrate della unità negativa e chiama questi nuovi enti "quantità silvestri" e giunge a precisare le regole per operare con i numeri che oggi vengono detti "complessi". Per ragioni oscure, almeno quanto quelle relative alla denominazione di quantità silvestri, distingue tra *i* e *-i*, introducendo i termini *più di meno* e *meno di meno*.

locuzione	espressione moderna
Più via più di meno,fa più di meno.	$(+1) \times (+i) = +i$
Meno via più di meno,fa meno di meno.	$(-1) \times (+i) = -i$
Più via meno di meno,fa meno di meno.	$(+1) \times (-i) = -i$
Meno via meno di meno,fa più di meno.	$(-1) \times (-i) = +i$
Più di meno via più di meno,fa meno.	$(+i) \times (+i) = -1$
Più di meno via men di meno,fa più.	$(+i) \times (-i) = +1$
Meno di meno via più di meno,fa più.	$(-i) \times (+i) = +1$
Meno di meno via men di meno,fa meno.	$(-i) \times (-i) = -1$

Ebbene il termine "quantità silvestri" evoca un ambiente di divinità pagane, tra boschi lussureggianti, Ninfe e Satiri, dal cui connubio nacquero queste forme ibride, Divine, Diaboliche e Sfuggenti. Il contesto in cui possono essere germogliate le entità di cui sopra è forse felicemente illustrato nel quadro riportato sotto che riproduce una idea, presumibilmente prossima al vero, di come Dionisio, Bacco, le Baccanti e il resto della gaudente brigata concepirono i numeri silvestri.

Fig. 36: La giovinezza di Bacco (William–Adolphe Bouguereau).

Potremmo certamente avanzare qualche ipotesi sulle motivazioni che possono aver determinato la scelta di definire *i* come "più di meno" o *pdm* come scriveva Bombelli nei suoi calcoli, ma preferiamo desistere.
Cerchiamo ora di capire cosa voglia effettivamente dire risolvere una equazione e faremo l'assunzione che le equazioni "vivano" in un universo popolato solo da numeri razionali, come quello della figura seguente.

Fig. 37: opera di Stefano Leonesi.

Supponiamo ora che la soluzione della nostra equazione corrisponda alla ricerca dell'autore di un crimine: gli investigatori si aspetteranno che questo non sfugga alle varietà umana e certo si troverebbero in difficoltà se dalle testimonianze risultasse l'evidenza di un colpevole con tre teste, sedici braccia e di colore azzurro.
Qualora fossimo interessati alla soluzione dell'equazione

$$x^2 - 5 = 0$$

in un universo popolato solo da numeri razionali, dovremmo concludere che nessuno degli abitanti del pianeta di Leonesi (figura precedente) sia in grado di soddisfarla, a meno di intrusione aliene o di modificazioni genetiche.
In termini "educati" diciamo che l'insieme dei numeri razionali costituisce un **campo *Q***, ovvero una struttura chiusa sotto le operazioni aritmetiche. Quello che intendiamo dire è che due elementi di Q combinati tramite le operazioni aritmetiche forniscono sempre un elemento di Q.[29]
Le forme aliene (o geneticamente modificate) se vogliono avere legittimità di appartenenza al mondo cui hanno avuto accesso devono adattarsi alle norme che regolano l'universo dei numeri razionali, ovvero devono potersi "accoppiare" tra loro tramite operazioni di moltiplicazione, addizione…
A tale scopo per estendere la cittadinanza ad un alieno k specificato da $k^2 = 5$, definiamo un generico elemento del campo allargato $Q\left(\sqrt{5}\right)$ come

$$\zeta = a + \sqrt{5}\, b \quad \in Q(\sqrt{5}) \qquad \text{con } a,\ b \in Q$$

Le regole di composizione di due elementi distinti $\zeta_1,\ \zeta_2$ sono del tutto analoghe a quelle relative al caso dei numeri immaginari

$$\zeta_1 \zeta_2 = m_p + \sqrt{5}\, n_p \qquad \text{con } m_p = a_1 a_2 + 5 b_1 b_2,\ n_p = a_1 b_2 + a_2 b_1 \in Q$$

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = m_R + \sqrt{5}\, n_R \qquad \text{con } m_r = \frac{a_1 a_2 - 5 b_1 b_2}{a_1^2 - 5 b_1^2},\ n_r = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 - 5 b_1^2} \in Q$$

$$a_1^2 - 5 b_1^2 \neq 0$$

Nel caso dell'equazione $x^2 + 1 = 0$, dovremmo accettare l'estensione del campo dei numeri razionali con l'introduzione di una unità k tale che $k^2 = -1$.
Fino ad ora abbiamo rafforzato il punto di vista del capitolo precedente, ovvero tutti i numeri hanno il medesimo diritto di cittadinanza in un campo ***Q* opportunamente allargato** purché tali numeri rispettino le regole aritmetiche del campo dei numeri razionali.
La soluzione dell'equazione

$$x^2 = x + 1$$

è dunque garantita nel campo esteso $Q(k)$, $k^2 = k + 1$; l'unico problema è che esistono due opzioni k_+ e k_- legate dalla relazione $k_- = k_+^{-1}$, nel capitolo precedente abbiamo imparato a trattare questo problema.

Volendo allargare le nostre prospettive dovremmo spiegare perché sia "facile" risolvere le equazioni di primo, secondo, terzo e quarto grado e perché sia molto meno facile risolvere quelle di grado superiore al quarto. Il problema non è dovuto al semplice fatto che l'analisi diventa più complicata, ma che quando si supera il 4 allora si deve cambiare modo di affrontare il problema, perché le tecniche di elevazione a potenza ed estrazione di radici non sono più sufficienti. I matematici sono più icastici ed affermano che il problema non è più risolubile per radicali. Il problema diventa troppo tecnico, per essere apprezzato senza eccessivo impegno, vedremo però di seguire il motivo conduttore che ha ispirato i grandi algebristi italiani di epoca rinascimentale.
Ci siamo però allontanati dalla concezione vedica della Matematica e vorremmo riprendere il filo dei nostri pensieri partendo dal modo con cui che nei testi vedici venivano trattate le equazioni algebriche, tornando così ad una visione meno occidentale del problema.

■ 2 I testi vedici e le equazioni algebriche di secondo grado

Come abbiamo già avuto modo di notare la concezione della dottrina vedica della matematica si discosta dal punto di vista occidentale nel senso che i problemi non vengono affrontati in maniera sequenziale. Infatti, le varie proposizioni non sono derivate da assiomi e legate tramite teoremi che a, loro volta, sono l'uno la conseguenza dell'altro. Piuttosto le problematiche vengono affrontate in parallelo sulla base di assunzioni ed intuizioni specifiche, le quali più che costituire un "corpus" sono relative allo specifico del problema trattato. E' pertanto estremamente difficile codificare una procedura teorica e i metodi per risolvere una classe di problemi si traducono in una serie di prescrizioni.
Tale modo di procedere si applica al caso delle equazioni di secondo grado, la cui soluzione viene affrontata in maniera estremamente interessante e affatto diversa dai metodi fino ad ora discussi.
Procederemo illustrando alcuni esempi, il primo dei quali è il seguente

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$

La strategia vedica è quella di sfruttare la simmetria dell'equazione, scrivendo il termine noto nella stessa forma del termine contenente l'incognita, ovvero notando che

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

La nostra equazione di partenza ora si scrive come

$$x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$$

e non sono necessari particolari commenti per convincersi che le radici del nostro problema sono

$$x = 3, \;\; x = \frac{1}{3}$$

Come ulteriori esempi proponiamo le equazioni

$$x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5} = 5 + \frac{1}{5}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7}$$

Il metodo si applica anche al caso in cui l'equazione sia scritta nella forma

$$(2\,x + 3) + \frac{1}{2\,x+3} = \frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7}$$

Da cui segue

$$2\,x + 3 = \begin{cases} 7 & \to \quad x = 2 \\ \frac{1}{7} & \to \quad x = -\frac{10}{7} \end{cases}$$

Ulteriori variazioni sul tema possono essere specificate, ma la sostanza della procedura non cambia. Invitiamo ora il lettore a constatare che ogni equazione di secondo grado del tipo generale $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ può essere scritta come

$$x + \frac{1}{x} = x_+ + \frac{1}{x_+} = x_- + \frac{1}{x_-}$$

dove

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}, \quad \frac{1}{x_\pm} = x_\mp$$

La “morale” che potremmo dedurre da questo è la seguente:

Le equazioni di secondo grado sono sempre scrivibili come l’uguaglianza della somma di due termini reciproci, le relative radici sono tali che il reciproco di ognuna corrisponde al coniugato dell’altra.

Anche se può apparire una forzatura, possiamo affermare che la formulazione vedica conteneva, al livello di intuizione, quanto discusso in precedenza a proposito dei numeri complessi.
Un metodo diverso, ma sempre di natura vedica, è basato su una procedura di fattorizzazione che illustreremo cominciando con il seguente esempio

$$x^2 + 7\,x + 10 = x^2 + 2\,x + 5\,x + 10 = x\,(x + 2) + 5\,(x + 2) = (x + 5)\,(x + 2)$$

Le “radici” dell’equazione $x^2 + 7\,x + 10 = 0$, sono pertanto -5 e -2.
La tecnica di fattorizzazione è ben chiara, la strategia è quella di enucleare dal trinomio un binomio da mettere a fattor comune.
Gli ulteriori esempi, riportati nel seguito, permettono di ottenere maggiore dimestichezza con il metodo

$$2\,x^2 + 5\,x + 2 = 2\,x^2 + 4\,x + x + 2 = 2\,x\,(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)\,(2\,x + 1),$$
$$4\,x^2 + 12\,x + 5 = 4\,x^2 + 2\,x + 10\,x + 5 = 2\,x\,(2\,x + 1) + 5\,(2\,x + 1) = (2\,x + 5)\,(2\,x + 1),$$
$$12\,x^2 + 13\,x - 4 = 12\,x^2 + 9\,x + 4\,x - 4 = 3\,x\,(4\,x - 1) + 4\,(4\,x - 1) = (3\,x + 4)\,(4\,x - 1).$$

Nel prossimo paragrafo affronteremo il problema delle equazioni cubiche.

3 I testi vedici e le equazioni algebriche di terzo grado

Anche nel caso delle equazioni di terzo grado i metodi suggeriti dagli antichi testi indiani offrono spunti interessanti, sebbene vadano visti nella prospettiva del paragrafo precedente, ovvero di assenza di un filo conduttore unitario.
Proviamo ora ad estendere il metodo dei reciproci, considerando l’equazione

$$x^2 + \frac{1}{x} = \frac{126}{5}$$

Scrivendo il secondo termine come

$$\frac{126}{5} = 25 + \frac{1}{5}$$

troviamo

$$x^2 + \frac{1}{x} = 25 + \frac{1}{5}$$

Pertanto, per le stesse ragioni discusse nel paragrafo precedente possiamo concludere che una delle radici è $x = 5$.
Notiamo ora che essendo l’equazione scrivibile in forma “canonica” come

$$x^3 - \frac{126}{5}\,x + 1 = 0$$

e che, essendo le restanti radici, legate a quella già nota dalle relazioni (poiché per la generica equazione $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$ la somma delle radici è pari a $-\frac{b}{a}$ e il prodotto a $-\frac{d}{a}$)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1\,x_2\,x_3 = -1$$

otteniamo le ulteriori soluzioni dal sistema riportato qui di seguito

$$x_2 + x_3 = -5$$
$$x_2\,x_3 = -\frac{1}{5}$$

Che infine fornisce

$x_2 = \frac{-25+\sqrt{645}}{10}$

$x_3 = \frac{-25-\sqrt{645}}{10}$

La conclusione di natura generale che deriva dalle considerazioni precedenti è dunque che qualsiasi equazione cubica esprimibile nella forma

$x^2 + \frac{1}{x} = a^2 + \frac{1}{a}$

ammette le soluzioni

$x_1 = a,$

$x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^4+4a}}{2a},$

$x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^4+4a}}{2a}.$

Sebbene il metodo precedente non sia citato nelle prescrizione vediche, lo abbiamo ascritto d'ufficio in quanto semplice generalizzazione di quello relativo alla soluzione delle equazioni di secondo grado.
Torniamo ora a quanto effettivamente tramandato, considerando l'equazione

$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

e riscriviamola come segue

$x^3 - x^2 - 4x^2 - 4x + 4x + 4 = x^2(x-1) - 4x(x-1) + 2(x-1) = 0$

La fattorizzazione è pertanto ovvia, cosicché avremo

$\left(x^2 - 4x + 2\right)(x-1) = (x-2)^2(x-1)$

La medesima procedura applicata all'equazione

$4x^3 + 7x + 4 = 0$

porterebbe a riscrivere l'espressione precedente in una forma facilmente fattorizzabile, ovvero

$4x^3 + 2x^2 - 2x^2 - x + 8x + 4 = 2x^2(2x+1) + x(2x+1) + 4(2x+1) = \left(2x^2 + x + 4\right)(2x+1) = 0$

Discutiamo ora come si possa inquadrare il problema in termini più generali. Prendiamo dunque in esame il trinomio $a x^3 + b x^2 + d$ e studiamo le condizioni per cui possa essere fattorizzato nel prodotto di due polinomi di primo e secondo grado. Scriviamo pertanto

$a x^3 + b x + d = a x^3 + e x^2 + f x^2 + g x + h x + d = x^2(a\ x + e) + x(f x + g) + h x + d$

Evidentemente per effettuare una fattorizzazione dovremo avere

$a = f = h$

$e = g = d$

$e + f = b$

$g + h = 0$

Nel caso in cui manchi il termine quadratico ovvero per $a x^3 + c x + d$, il processo di fattorizzazione può essere eseguito come

$a x^3 + e x^2 - e x^2 + g x + h x + d = x^2(a x - e) + x(e x + g) + h x + d$

pertanto le condizioni di fattorizzazione sono date da

$a = e = h$

$-e = g$

$g + h = c$

La procedura non è particolarmente laboriosa ma vale solo in determinate condizioni (fortunate), vedremo nel seguito come i concetti discussi in questo ultimo paragrafo possano essere inquadrati in un contesto più generale.

4 Una divagazione sul concetto di radice

Prima di procedere oltre vogliamo mettere in evidenza che la nozione di radice di una equazione è in qualche modo la generalizzazione del concetto di radice stessa. Nel caso dell'equazione di terzo grado abbiamo visto come la relazione

$X = \sqrt[(3,1_b)]{-c}$

rappresenti le soluzioni della equazione di terzo grado

$X^3 + b\,X + c = 0$

Invertendo il ragionamento possiamo anche introdurre la seguente forma di elevamento a potenza

$Y^{(3,\,1_b)} = Y^3 + b\,Y$

Il formalismo non si limita ovviamente ai polinomi di terzo grado, per cui la notazione $Y^{(2,\,1_b,\,0_c)}$ denota il polinomio di secondo grado

$Y^{(2,\,1_b,\,0_c)} = Y^2 + b\,Y + c$

Più in generale potremo scrivere

$Y^{(m,\,(m\text{-}1)_{b_1},\dots,\,1_{b_{m-1}},\;0_{b_m})} = Y^m + b_1\,Y^{m-1} + \dots + b_{m-1}\,Y + b_m$

La notazione precedente viene denominata *ultraradicale*, concetto che appare sporadicamente nella letteratura matematica occidentale in merito alla soluzione delle equazioni di quinto grado[30]. Qui introdurremo il termine *ultrapotenza* per indicare l'operazione inversa.
In tale contesto una equazione algebrica di secondo grado si indicherà come

$Y^{(2,\,1_b,\,0_c)} = 0$

mentre le sue soluzioni saranno date da

$Y = \sqrt[(2,\,1_b)]{-c}$

Messo in questi termini il discorso sembrerebbe suggerire che l'inverso di qualsiasi ultrapotenza sia un ultraradicale e quindi il problema di cercare la soluzione di una equazione algebrica sia risolto in maniera piuttosto naturale. Ovviamente le cose non stanno così: si tratta solo di un modo diverso di formulare la questione e il calcolo esplicito di un ultraradicale si traduce negli identici problemi della ricerca della radice di una equazione. E' infatti evidente che

$$\sqrt[(2,\,1_b)]{-c} = \begin{cases} Y_+ = \dfrac{-b+\sqrt[2]{b^2-4\,c}}{2} \\[2ex] Y_- = \dfrac{-b-\sqrt[2]{b^2-4\,c}}{2} \end{cases}$$

Nelle pieghe del formalismo è però sempre possibile trovare qualche vantaggio.
Proviamo, ad esempio, a definire la soluzione della seguente equazione di quarto grado

$\left(X^2 + d\,X\right)^2 + b\,(X^2 + d\,X) = c$

utilizzando il formalismo prima esposto. E' evidente che la precedente equazione si può esprimere, in termini di ultra-potenze, come

$\left[X^{(2,\,1_d)}\right]^{(2,1_b)} = c$

Per cui la relativa soluzione è scrivibile come

$$X = \sqrt[(2,\,1_b)]{\sqrt[(2,\,1_d)]{c}}$$

che rappresenta solo un modo conciso per definire la soluzione di una equazione biquadratica. Limitandoci alle sole soluzioni X_+ avremo

$$X = \sqrt[(2,\,1_b)]{\frac{-d+\sqrt[2]{d^2+4\,c}}{2}} = \frac{-b+\sqrt{b^2+2\,(-d+\sqrt[2]{d^2+4\,c}\;)}}{2}$$

Qualora volessimo introdurre le altre avremmo a che fare con quattro radici diverse.
L' equazione appena risolta è una sorta di equazione biquadratica, che, ispirandoci al metodo vedico discusso nel paragrafo 2, potrebbe essere risolta nella forma alternativa

$Y - \frac{1}{Y} = Y_{\pm} + \frac{1}{Y_{\pm}}$

$Y = \frac{(X^2 + d\,X)}{\sqrt{c}}$

$Y_{\pm} = \frac{-\frac{b}{\sqrt{c}} \pm \sqrt{\frac{b^2}{c} + 4}}{2}$

Notando ora che in base alla nostra definizione di ultrapotenza possiamo anche scrivere che

$x + \frac{1}{x} = x^{(1,-1)}$

avremo pertanto

$$x + \frac{1}{x} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \to x^{(1,-1)} = \alpha^{(1,-1)} \;\to\; x = \sqrt[(1,-1)]{\alpha + \frac{1}{\alpha}} = \begin{cases} \alpha \\ \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Notiamo infine che per quanto concerne una equazione di terzo grado potremmo applicare la stessa procedura. Considerando infatti la forma

$$x^2 + \frac{1}{x} = a^2 + \frac{1}{a} \to x^{(2,-1)} = a^{(2,-1)} \;\to\; x = \sqrt[(2,-1)]{a^2 + \frac{1}{a}} = \begin{cases} \frac{-a + \sqrt{a^4 + 4\,a}}{2\,a} \\ a \\ \frac{-a + \sqrt{a^4 + 4\,a}}{2\,a} \end{cases}$$

Tali relazioni, sebbene molto semplici, mettono in luce la flessibilità del concetto di ultraradicale e di ultrapotenza illustrato in questo paragrafo. Torneremo brevemente sull'utilizzo di tale formalismo accennando alle soluzioni dell'equazioni di quinto grado, ma per ora ci accontenteremo di una trattazione meno "innovativa".

5 Polinomi di terzo grado

Abbiamo completato il capitolo precedente con la derivazione di una serie di algoritmi, relativi alla soluzione delle equazioni algebriche di grado arbitrario, che, in buona sostanza, utilizzava una procedura di riduzione dell'equazione ad una di grado inferiore di cui fosse nota la soluzione. La "speranzella" che ha guidato per secoli la ricerca della formula (esatta) risolutiva delle equazioni algebriche di grado arbitrario era stata proprio quella che un'equazione algebrica di grado n potesse essere sempre ridotta alla soluzione di un'equazione di grado inferiore, dopo un numero (finito) di sostituzioni. La cosa fino ad un certo punto ($n = 4$) funziona, ma dopo no.
Cercheremo di capire quali siano gli elementi essenziali della strategia.

Utilizzeremo a tale scopo il cosiddetto metodo di Vietè[31] per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, che è essenzialmente il metodo di complemento al quadrato visto da un punto di vista leggermente diverso.
La procedura risolutiva consiste nel porre $x = y + z$ nell'equazione di secondo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, ottenendo così

$$a\,(z^2 + y^2) + (2\,a\,y + b)\,z + b\,y + c = 0$$

Con l'obiettivo di ottenere un'equazione di secondo grado pura in z, richiediamo che il termine di primo grado in z si annulli, e avremo

$$2\,a\,y + b = 0 \implies y = -\frac{b}{2\,a}$$

che sostituita sopra nell'equazione originaria in z e y dà

$$a\,z^2 + c - \frac{b^2}{4\,a} = 0$$

cosicché alla fine otteniamo il già noto risultato.
Cosa possiamo concludere dall'ispezione del metodo di Vietè:

1. una equazione di secondo grado può essere scritta in forma ridotta ovvero senza il termine di primo grado tramite una opportuna trasformazione della variabile;
2. La soluzione di una equazione di secondo grado viene ricondotta ad una di primo nella incognita z e alla successiva estrazione di una radice quadrata.

Vedremo nel seguito come il metodo appena descritto sia fondamentale per lo studio delle equazioni algebriche di terzo grado e non solo. Consideriamo pertanto la seguente equazione algebrica di terzo grado che diremo completa

$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$

Potremmo pervenire alla sua soluzione, notando che questa può essere ottenuta generalizzando l'operazione di estrazione della radice, e, utilizzando il formalismo degli ultraradicali, potremo scrivere che

$$X = \sqrt[\left(3,\, 2_{\frac{b}{a}},\, 1_{\frac{c}{a}}\right)]{-\frac{d}{a}}$$

La scrittura precedente rappresenterebbe una soluzione del problema se sapessimo come calcolare un ultraradicale ovvero se avessimo definito, in maniera rigorosa, le sue proprietà. Proveremo a definire un metodo per fornire un algoritmo di calcolo, utilizzando quanto conosciamo sulle equazioni algebriche di grado arbitrario. Come è facile verificare una equazione di terzo grado completa è sempre riconducibile alla sua forma ridotta operando una trasformazione di tipo Vietè otterremo

$$R(t) = t^3 + p\,t + q = 0$$
$$x = t - \frac{b}{3a}$$
$$p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$
$$q = -2\left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{b\,c}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

In termini di ultraradicali la soluzione della equazione di terzo grado nella sua forma ridotta può essere scritta come

$$T = \sqrt[(3,1_p)]{-q}$$

Utilizzando la procedura "immorale" che ci ha permesso di definire la soluzione delle equazioni di secondo grado in termini di frazioni continue, possiamo scrivere

$$t = \sqrt[3]{-q - p\,t}$$

Ed è dunque evidente che le iterazioni successive

$$t_{n+1} = \sqrt[3]{-q - p\,t_n}\,,$$
$$t_0 = 0$$

forniscono l'algoritmo di calcolo di un ultraradicale di ordine 3.

La figura seguente indica come la procedura di iterazione permetta il calcolo dell'ultraradicale $\sqrt[(3,1_{-2.5})]{4}$; la convergenza del metodo appare piuttosto lenta e infatti, in corrispondenza dei valori dell'iterazione, si osserva che $R(t_n)$ assume un valore prossimo allo zero per valori di n superiori a 10.

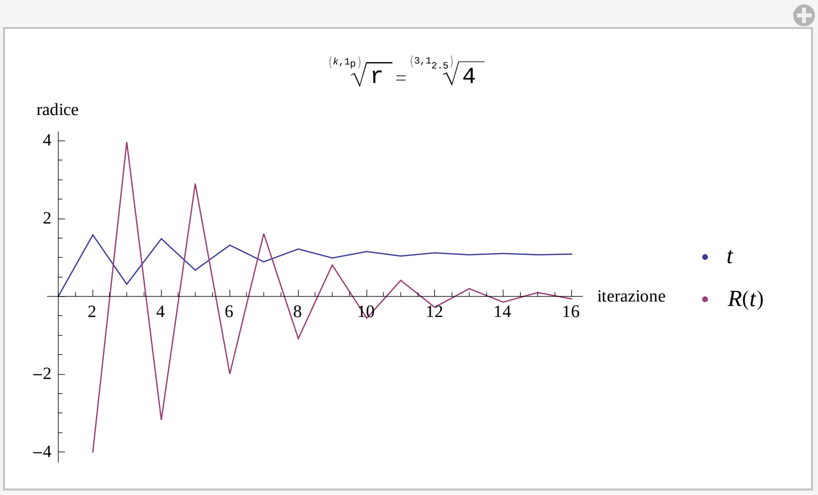


Fig. 38: calcolo di ultraradicali.

Fin qui praticamente nulla di nuovo rispetto a quanto discusso alla fine del precedente capitolo, cerchiamo pertanto di definire una procedura non approssimata che fornisca una soluzione in termini di radici ordinarie, come nel caso delle equazioni di secondo grado. Supponiamo che la soluzione dell'equazione di terzo grado ridotta possa essere posta nella forma

$t = u + v$

elevando al cubo ambo i membri della relazione precedente, avremo

$t^3 = 3\,u\,v\,(u + v) + (u^3 + v^3) = 3\,u\,v\,t + (u^3 + v^3)$

riscrivibile nella forma

$t^3 - 3\,u\,v\,t - (u^3 + v^3) = 0$

Che confrontata con l'equazione di partenza permette le seguenti identificazioni

$3\,u\,v = -p$

$u^3 + v^3 = -q$

Eseguiamo ora le ulteriori trasformazioni

$u^3 = \zeta$

$v^3 = \eta$

in modo da ottenere il sistema equivalente

$\zeta\,\eta = -\frac{p^3}{27}$

$\zeta + \eta = -q$

da cui si riconosce che le quantità ζ, η sono le soluzioni dell' equazione di secondo grado

$\sigma^2 + q\,\sigma - \frac{p^3}{27} = 0$

per cui si avrà

$$\eta = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\,\frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$\zeta = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\,\frac{p^3}{27}}}{2}$$

La soluzione del nostro problema, o meglio una delle radici della ridotta, è esprimibile come

$$X = \sqrt[3]{\eta} + \sqrt[3]{\zeta}$$

Come abbiamo già visto (e come vedremo meglio nel seguito) il problema del calcolo delle altre radici è praticamente immediato.
Ci preme far notare che la soluzione dell'equazione di terzo grado dipende, in ultima istanza, da quella di una di secondo grado. La formula risolutiva che abbiamo ora ottenuta risulta essere una sorta di generalizzazione del metodo babilonese del complemento al quadrato e potremmo definirla, in maniera forse azzardata, come un completamento al cubo. Il metodo viene detto *Cardanico*, in onore del matematico italiano Gerolamo Cardano che per primo lo descrisse nel suo libro "Ars Magna" anche se il reale scopritore della formula fu un algebrista, sempre italiano, Niccolò Fontana detto Tartaglia, che con Cardano ebbe una lunga corrispondenza [32].
Le grandi idee sono sempre più feconde di come si possa ritenere e portano molto al di là di quanto previsto dallo scopritore stesso. Nel seguito vedremo come l'idea di Tartaglia possa essere ulteriormente sfruttata.

Abbiamo fino ad ora visto che

$$\sqrt[(3,1,p)]{-q} = \sqrt[3]{\eta} + \sqrt[3]{\zeta}$$

e poiché η, ζ sono le soluzioni di una equazione di secondo grado, potremmo ad esempio chiederci se esista una equazione di quinto grado che abbia una soluzione della forma

$$X = \sqrt[5]{x_+} + \sqrt[5]{x_-}$$

dove $x_\pm$ sono soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2 = \alpha\,x + \gamma$. Per stabilire come sia fatta tale equazione procediamo elevando alla quinta potenza ambo i membri della precedente espressione e, utilizzando il fatto che $x_+ \, x_- = \gamma, \; x_+ + x_- = \alpha$, otteniamo

$$X^5 - 5 \sqrt[3]{\gamma} \; X^3 + 5 \sqrt[3]{\gamma^2} \; X = \alpha$$

In base alla relazione precedente potremo anche concludere che

$$\sqrt[(4,3_A,1_B)]{\alpha} = \sqrt[5]{x_+} + \sqrt[5]{x_-}$$

$$A = -5 \sqrt[3]{\gamma}$$

$$B = 5 \sqrt[3]{\gamma^2}$$

Ebbene, l'equazione appena ottenuta è una equazione di quinto grado la cui soluzione dipende dalle radici di una di secondo grado. La relativa soluzione è dunque ottenibile utilizzando operazioni di estrazioni successive di radici (quadrate e quintuple) e senza dunque introdurre concetti di natura più elevata. Sfortunatamente non tutte le quintiche (ovvero le equazioni di quinto grado) sono riducibili alla forma precedente che rimane un caso particolare (detto di De Moivre) di un problema "assai" più complicato. Invitiamo il lettore a provare che le corrispondenti equazione di De Moivre di settimo grado e ottavo grado sono

$$X^7 - 7\, c\, X^5 + 14\, c^2\, X^3 - 7\, c^3\, X - \alpha = 0$$
$$X^8 - 8\, c\, X^6 + 20\, c^2\, X^4 - 16\, c^3\, X^2 + 2\, X^4 - \alpha = 0$$
$$c = \sqrt[n]{\gamma}\,, \; n = 7,\; 8$$

e che, più in generale, i coefficienti di una equazione di DeMoivre di grado arbitrario possono essere espressi come

1							
1							
1	−2						
1	−3						
1	−4	2					
1	−5	5					
1	−6	9	−2				
1	−7	14	−7				
1	−8	20	−16	2			
1	−9	27	−30	9			
1	−10	35	−50	25	−2		
1	−11	44	−77	55	−11		
1	−12	54	−112	105	−36	2	
1	−13	65	−156	182	−91	13	
1	−14	77	−210	294	−196	49	−2

Fig. 39: Triangolo di De Moivre.

Torneremo nel seguito sul problema della identificazione dei coefficienti del Triangolo di De Moivre con alcune famiglie di numeri discusse in precedenza.

6 Equazioni algebriche e trigonometria.. e altro

Abbiamo già messo in evidenza il legame tra equazioni algebriche di secondo grado, geometria e trigonometria, che ora proveremo ad approfondire. Anche se non detto in maniera esplicita le considerazioni che abbiamo fatte sulle soluzioni di una equazione di secondo grado ci portano a concludere che le relative radici possono essere elaborate facendo ricorso alle formule trigonometriche; supponiamo infatti che $\Delta<0$, e poniamo

$$x_+ = A\, e^{i\,\phi}$$

$$x_- = A\, e^{-i\,\phi}$$

Potremo determinare A e ϕ tenendo conto che

$$x_+\, x_- = \frac{c}{a} \implies A = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

e che

$$\frac{x_+ + x_-}{2} = \mathrm{A}\cos(\phi) \implies \mathrm{A}\cos(\phi) = -\frac{b}{2a}$$

$$\frac{x_+ - x_-}{2i} = \mathrm{A}\sin(\phi) \implies A\sin(\phi) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$\implies \tan(\phi) = -\frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}$$

Tali soluzioni possono essere rappresentate sul piano di Argand - Gauss come mostrato nella figura seguente.
Evidentemente la stessa procedura si applica al caso dell'equazione cubica risolta in forma "cardanica" e infatti possiamo scrivere

$$X = \sqrt[3]{x_+} + \sqrt[3]{x_-} = 2\sqrt[3]{A}\,\cos\left(\frac{\phi}{3}\right)$$

valida nel caso in cui $q^2 + 4\,\frac{p^3}{27} < 0$. Tenuto ora conto che

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 & = 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \end{cases}$$

possiamo ottenere le soluzioni associate alla soluzione di una equazione algebrica di terzo grado nella forma

$$X_2 = 2\sqrt[3]{A}\,\cos\left(\frac{\phi+2\pi}{3}\right)$$

$$X_3 = 2\sqrt[3]{A}\,\cos\left(\frac{\phi-2\pi}{3}\right)$$

Tutte le equazioni nella forma di De Moivre ammettono soluzioni analoghe.
Data dunque una equazione di De Moivre possiamo rappresentarne le soluzioni sulla frontiera di un cerchio.
Prima di chiudere questo paragrafo torneremo alla trattazione vedica del problema, provando a mettere assieme le considerazioni del paragrafo precedente con quelle sviluppate in questo.
Riguardo all'equazione

$$x^3 + 3x = 4$$

stabiliamo facilmente che una delle sue soluzioni è 1 e le altre sono invece complesse.
Dalla formula risolutiva inferiamo invece che

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Siamo pertanto costretti a concludere che[33]

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$$

cosa estremamente difficile da dimostrare se si prescinde dalla soluzione dell'equazione cubica. Qualora qualcuno volesse appiccicare un significato esoterico alla precedete osservazione potremmo anche osservare che la precedente combinazione di radicali appartiene alla famiglia di *Radicali Mistici*, in quanto legati al rapporto aureo tramite l'identità

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}} = \begin{cases} \varphi \\ -\varphi' \end{cases}$$

Invitiamo il lettore ad esplorare tale possibilità perché noi, malgrado eroici tentativi, non ci siamo riusciti.
Inoltre come ulteriore passatempo proponiamo di provare la seguente identità mistica

$$\sqrt[6]{9 \pm 4\sqrt{5}} = \sqrt[9]{38 \pm 17\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}}$$

e la seguente meno mistica

$$\sqrt[3]{7 \pm 5\sqrt{5}\ 2} = \sqrt[5]{45 \pm 29\sqrt{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

visto che è legata al rapporto d'argento, ma altrettanto complicata da dimostrare.

■ 7 Polinomi di quarto grado

Nel paragrafo precedente abbiamo imparato che la soluzione di una equazione di terzo grado è “riducibile”, tramite il metodo TCD, a una di secondo grado. In aggiunta abbiamo anche visto che una intera classe di equazioni (superiori al terzo) può essere ridotta a forme di tipo cardanico. Possiamo ora sperare di ottenere qualche cosa di simile, almeno da un punto di vista metodologico, per quanto concerne le equazioni di quarto grado. Poiché, come già sappiamo, la trasformazione di Viéte ci permette di eliminare il termine di terzo grado, considereremo nel seguito la forma “canonica”

$$x^4 + p\,x^2 + q\,x + d = 0$$

Poniamo dunque

$$x = u + v + z$$

e notiamo che

$$x^2 = u^2 + v^2 + z^2 + 2\,(u\,v + v\,z + z\,u)$$

$$x^2 - (u^2 + v^2 + z^2) = 2\,(u\,v + v\,z + z\,u)$$

$$\left[x^2 - (u^2 + v^2 + z^2)\right]^2 = [2\,(u\,v + v\,z + z\,u)]^2$$

$$x^4 - 2\,(u^2 + v^2 + z^2)\,x^2 + (u^2 + v^2 + z^2)^2 = 4\,(u^2\,v^2 + v^2\,z^2 + z^2\,u^2) + 8\,u\,v\,z\,(u + v + z)$$

A questo punto, anche se non immediatamente evidente, il problema è risolto: scriviamo infatti l’ultima riga come segue

$$x^4 - 2\,(u^2 + v^2 + z^2)\,x^2 - 8\,u\,v\,z\,x + (u^2 + v^2 + z^2)^2 - 4\,(u^2\,v^2 + v^2\,z^2 + z^2\,u^2) = 0$$

Confrontando questa espressione con quella originale, possiamo fare le seguenti identificazioni

$$u^2 + v^2 + z^2 = -\frac{p}{2}$$
$$u\,v\,z = -\frac{q}{8}$$
$$(u^2 + v^2 + z^2)^2 - 4\,(u^2\,v^2 + v^2\,z^2 + z^2\,u^2) = r$$
$$(u^2\,v^2 + v^2\,z^2 + z^2\,u^2) = \left(\frac{p^2-4\,r}{16}\right)$$

Ponendo

$$U = u^2,\;\; V = v^2,\;\; Z = z^2$$

otteniamo il sistema

$$U + V + Z = -\frac{p}{2}$$
$$U\,V + V\,Z + U\,Z = \frac{p^2-4\,r}{16}$$
$$U\,V\,Z = \frac{q^2}{64}$$

la cui soluzione dipende da quella della seguente equazione di terzo grado

$$Y^3 - \frac{p}{2}\,Y^2 + \frac{p^2-4\,r}{16}\,Y - \frac{q^2}{64} = 0$$

Il problema è stato dunque risolto, in termini molto generali.
La scrittura esplicita delle relative soluzioni è molto involuta e aggiungerebbe poco a quanto volevamo comunicare.

Crediamo opportuno chiudere questo paragrafo provando a sintetizzare il metodo di soluzione[34] proposto da Ludovico Ferrari[35] (un allievo di Cardano), che arriva alla soluzione dando scacco al problema in 4 mosse.
Consideriamo per semplicità un esempio specifico, ovvero la ricerca delle soluzioni dell’equazione

$$x^4 + 4\,x^2 + 36 = 60\,x$$

Il problema sarà affrontato con una tecnica che ricorda il complemento al quadrato

1. si opera in modo da trasformare il primo membro in un quadrato perfetto, nel presente caso aggiungendo e sottraendo $8\,x^2$ si ottiene

   $$x^4 + 4\,x^2 + 8\,x^2 + 36 = 8\,x^2 + 60\,x \;\rightarrow\; (x + 6)^2 = 8\,x^2 + 60\,x$$

2. si introduce una variabile ausiliaria y in modo da lasciare il primo membro sotto forma di quadrato, ovvero

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 2\,(4 + y)\left[x^2 + \frac{30}{4+y}\,x + \frac{y\,(y+12)}{4+y}\right]$$

3. l'equazione al secondo membro, se considerata come della sola x, si riduce ad un quadrato perfetto se si impone che il suo discriminante sia nullo, ovvero assumendo che

$$\Delta\,(y) = \frac{30^2}{4+y} - 4\,y\,(y + 12) = 0$$

Sulla base di tale imposizione si ottiene

$$\left(x^2 + 6 + y^*\right)^2 = 2\,(4 + y^*)\left[x + \frac{30}{4+y^*}\right]^2,$$

$$y^* = \sqrt[(3,2_4,1_3)]{237}$$

dove y^* è la una delle soluzioni della equazione cubica associata alla condizione sul determinante.

4. Il problema è dunque risolto, infatti tutto si riduce alla soluzione di

$$(x^2 + 6 + y^*) = \pm 2\,(4 + y^*)\left[x + \frac{30}{4+y^*}\right]$$

La soluzione espressa in termini di ultraradicali è

$$(x^2 \pm 2\,(4 + y^*)\,x) = \pm 60 + 6 - y^*$$

$$x = \sqrt[(2,\,1_{\pm b\,(y^*)})]{6 - y^* \pm 60}\,,$$

$$b\,(y^*) = \pm 2\,(4 + y^*)$$

Come ultima annotazione di questo paragrafo torniamo agli ultraradicali e consideriamo l'equazione di quinto grado

$$x^5 + x + a = 0$$

In termini di ultraradicali la relativa soluzione si scrive come

$$x = \sqrt[(5,1_1)]{-a}$$

Tale forma della soluzione (sebbene con un differente simbolismo) viene detta di Bring-Jerrard[36] e il calcolo esplicito dell'ultra-radicale viene eseguito ponendo

$$f\,(x) = x^{(5,1_1)} = x^5 + x$$

e calcolando la soluzione del nostro problema tramite lo sviluppo in serie di $f^{-1}\,(-a)$ (ovvero come l'inverso della iper-potenza di ordine 5) che in questo caso può scriversi come

$$\sqrt[(5,1_1)]{-a} = -\sum_{k=0}^{\infty}\binom{5\,k}{k}\frac{(-1)^k\,a^{4\,k+1}}{4\,k+1} = -a + a^5 - 5\,a^9 + 35\,a^{13} + \ldots$$

In questo giro abbiamo mischiato vecchio e moderno e abbiamo imparato un certo numero di cose; evidentemente le soluzioni complete delle equazioni di grado elevato (che includano il terzo ed il quarto) comportano un notevole sforzo di calcolo. Perfino la soluzione generale, se scritta in maniera da contemplare tutti i casi possibili, diventa molto poco trasparente. Eppure i matematici del rinascimento avevano sviluppato metodi che permettevano il calcolo delle relative radici con notevole precisione e ciò che ne rendeva la cosa più eccezionale era la notazione che di certo non aiutava. Nel prossimo paragrafo accenneremo a tali problematiche, cercando di capire quanto fosse difficile l'arte del computo e perché fosse importante trovare metodi sempre più accurati.
Nel prossimo paragrafo vedremo in che misura.

■ 8 Soluzioni e approssimazioni

La notazione usata dagli algebristi italiani non era invero dissimile da quella araba che classificava 14 tipi di equazioni cubiche[32] utilizzando espressioni verbali; ad esempio "Cubi e censi e cose uguali a numero" indicava l'equazione $x^3 + a\,x^2 + b\,x = c$. Eppure i metodi utilizzati permettevano di raggiungere approssimazioni ragguardevoli, corrette fino alla decima cifra decimale.

Come esempio riportiamo la soluzione dell'equazione "Cubi uguali a cose e numero" ($x^3 = 3x + 1$) risolta dal matematico persiano Biruni intorno all'anno 1000. Biruni non spiega la tecnica impiegata e fornisce il valore dell'incognita in forma sessagesimale ovvero $x = 1^o\,52'\;\;45''\,47'''\,13^{iv} = 1.8793852\,62345679$.
Per verificarne l'esattezza abbiamo utilizzato il metodo iterativo dei radicali ripetuti

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + 3x_n},$$
$$x_0 = k$$

e abbiamo ottenuto quanto riportato nella figura seguente;

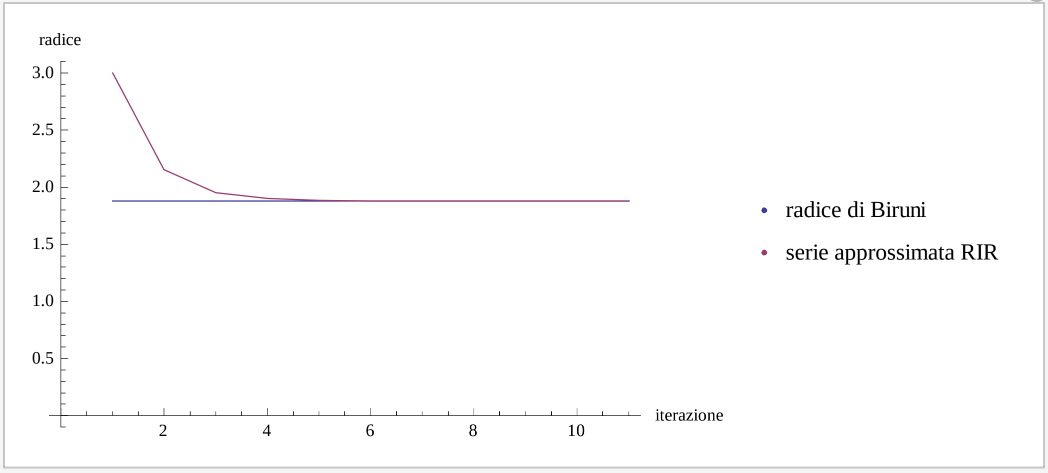


Fig. 40: soluzione della prima equazione di Biruni con il metodo dei radicali ripetuti e $x_0 = 3$.

Dopo 15 iterazioni ritroviamo un risultato molto vicino a quello di Biruni e dopo 30 una soluzione stabile alla 16-ma cifra decimale.
Biruni risolve anche l'equazione $x^3 = 3x - 1$ ottenendo la soluzione 0.3472963734567901. Abbiamo utilizzato il metodo iterativo per ottenere tale valore partendo da numeri molto vicini (ma non identici) al valore dato dal matematico persiano. Nella figura seguente riportiamo i risultati dell'iterazione che non sono "stabili" e dopo un certo numero di "prove" si spostano verso le due altre soluzioni della cubica, che, dal punto di vista del nostro algoritmo risultano essere molto stabili. Evidentemente i matematici arabi possedevano tecniche di approssimazione di uso corrente, visto che non vengono riportate nel manoscritto di Biruni, che utilizza le predette equazioni per risolvere il problema della costruzione di poligoni regolari di 9 e 18 lati.

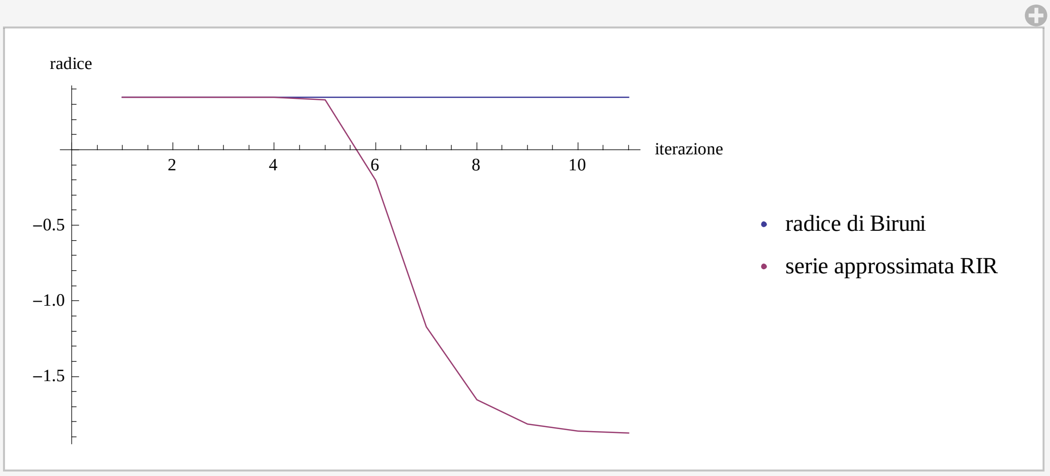


Fig. 41: soluzione della seconda equazione di Biruni con il metodo dei radicali ripetuti e $x_0 = 0.347293$.

Gli stessi metodi vennero importati in Italia da Fibonacci che fornisce la soluzione dell'equazione $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ con una approssimazione di dieci cifre decimali[37]. In questo caso l'algoritmo dei radicali ripetuti non fornisce un risultato attendibile, utilizzando invece un metodo più affidabile (il metodo di Newton) otteniamo quanto mostrato nella figura seguente, che riporta la soluzione ottenuta per iterazioni successive.

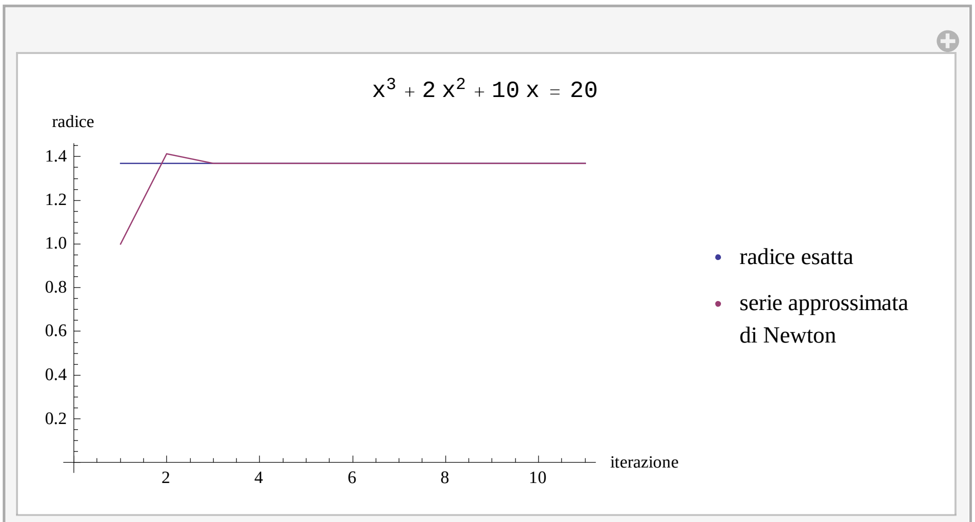


Fig. 42: soluzione dell'equazione di Fibonacci con il metodo di Newton e $x_0 = 1$.

Una soluzione approssimata alla quattordicesima cifra decimale ($x = 1.3688081078\ (21\,373)$, dove le cifre in parentesi sono state ottenute al calcolatore) si può avere con un numero basso di iterazioni ($n = 5$ è sufficiente). Il confronto con il risultato fornito da Fibonacci in base sessagesimale

$$x = 1^{o}\, 22^{i}\, 7^{ii}\, 42^{iii}\, 33^{iv}\, 4^{v}\, 40^{vi} = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} = 1\ .3688081078(532)$$

è comunque notevole, tenuto anche conto che il metodo di approssimazione impiegato non era certamente quello di Newton, quello presumibilmente utilizzato era simile a quello archimedeo dell'intersezione delle coniche e presumibilmente richiedeva una quantità notevole di operazioni aritmetiche. Abbiamo pertanto provato ad applicare tale metodo alla soluzione dell'equazione di Fibonacci, introducendo la seguente curva ausiliaria

$$y = \frac{1}{2\,p}\,x^2$$

$$p\,y\,x + 2\,p\,y + 5\,x = 10$$

Che sostituita nell'equazione di terzo grado fornisce la curva

$$p\,y\,x + 2\,p\,y + 5\,x = 10 \implies y = -\frac{5\,(x-2)}{p\,(x+2)}$$

Il punto di intersezione fornisce la soluzione della equazione originaria, come mostrato nella figura seguente.

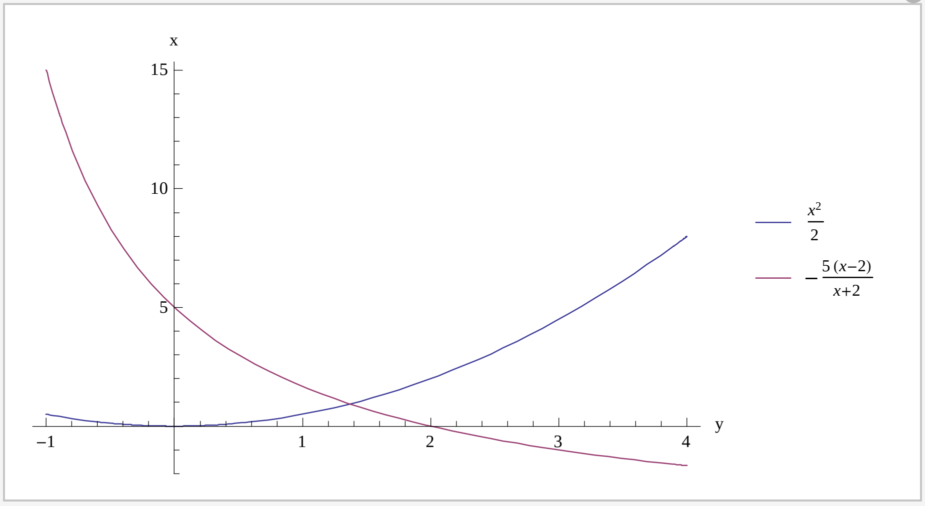


Fig. 43: soluzione dell'equazione cubica di Fibonacci con il metodo dell'intersezione delle coniche.

La ricerca delle soluzioni è essenzialmente la stessa che aveva condotto Menecno alla risoluzione del problema della duplicazione del volume del cubo.

La stessa procedura applicata alle equazioni di Biruni permette di risolvere il problema altrettanto "facilmente".
I metodi "collaudati" di soluzione nell'area del mediterraneo intorno al 1000 erano probabilmente questi ed affondavano la loro origine nella concezione geometrica dell'algebra sviluppata dai greci.
Il punto di vista geometrico continua anche nei nostri giorni e sebbene il problema delle cubiche si stato esaminato in tutti i suoi aspetti a volte qualche risultato pregevole viene ancora prodotto.
Prima di concludere questo capitolo accenneremo alla "geometria" dell'equazione cubica utilizzando quando riportato nella figura seguente[38], dove abbiamo riportato la funzione $y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$.

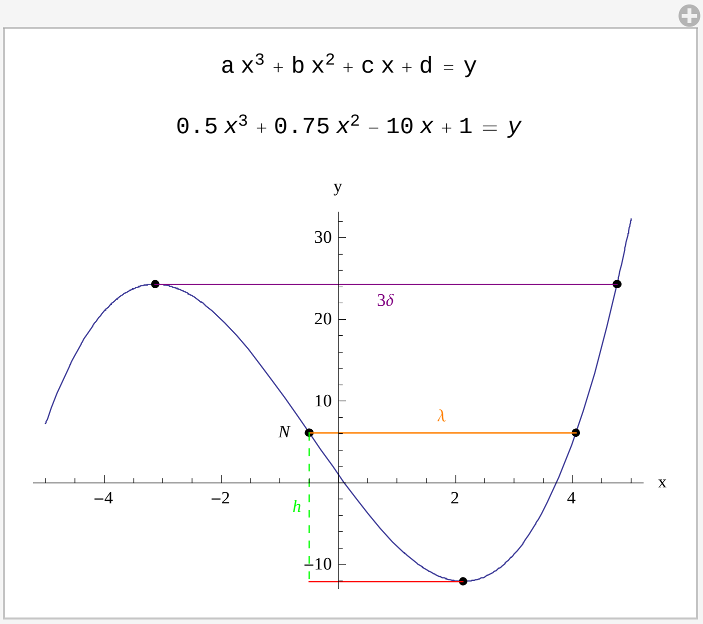


Fig. 44: la geometria della cubica.

Il punto

$N \equiv (x_N,\ y_N)$

con $x_N = -\frac{b}{3a}$

è il punto di "simmetria" della cubica e fornisce una giustificazione geometrica alla trasformazione di Vietè discussa in precedenza. Ulteriori parametri significativi sono λ, δ, h, riportati in figura e sarebbe un utile esercizio dimostrare che

$\lambda^2 = 3\,\delta^2$,

$h = 2\,a\,\delta^3$,

$\delta^2 = \frac{b^2 - 3\,a\,c}{9\,a^2}$

E' evidente che si avrà con

$y_n^2 > h^2$, una sola radice reale

$y_n^2 = h^2$, tre radici reali (due coincidenti)

$y_n^2 < h^2$, tre radici reali

Consideriamo ora l'ultimo caso e proviamo a vedere quale sia il significato geometrico delle soluzioni trigonometrica, che vengono mostrate graficamente nella figura seguente, e sono esprimibili come

$\alpha = x_N + 2\,\delta\cos(\theta)$,

$\beta = x_N + 2\,\delta\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$,

$\gamma = x_N + 2\,\delta\cos\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right)$,

$\cos(3\,\theta) = -\frac{y_N}{h}$

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = y$$

$$0.5\,x^3 + 0.75\,x^2 - 4\,x - 0.5 = y$$

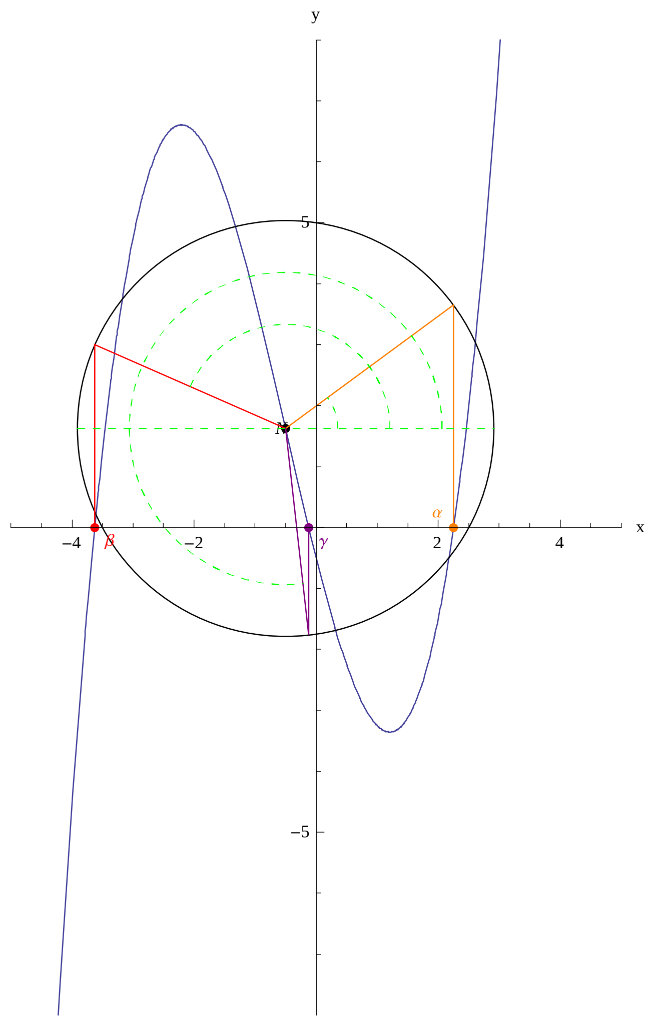


Fig. 45: la trigonometria della cubica.

Proviamo ora ad applicare il metodo alla soluzione dell'equazione

$x^3 - 7\,x^2 + 14\,x - 8 = 0$

Eseguendo le prescrizioni precedenti avremo

$x_N = \frac{7}{3} \implies y_N \cong -0.7407,$

$\delta^2 = \frac{7}{9},$

$h \cong 1.3718,$

$\cos(3\,\theta) \cong 0.5399 \implies \theta \cong 19.1066^o$

da cui si deducono le re radici

$$\alpha = \tfrac{7}{3} + 2\sqrt{\tfrac{7}{9}}\ \cos\left(19.1066^{o}\right) = 4,$$

$$\beta = \tfrac{7}{3} + 2\sqrt{\tfrac{7}{9}}\ \cos\left(19.1066^{o} + \tfrac{2}{3}\pi\right) = 1,$$

$$\gamma = \tfrac{7}{3} + 2\sqrt{\tfrac{7}{9}}\ \cos\left(19.1066^{o} + \tfrac{4}{3}\pi\right) = 2$$

L'equazione di quarto grado non trovava grandi applicazioni nel mondo antico, anzi, data la concezione pratica che si aveva al tempo, la ricerca delle sue soluzioni veniva considerata una perdita di tempo, dal momento che le potenze di 4 (e superiori) parevano non avere alcun significato da un punto di vista geometrico.

L'interesse per le equazioni di terzo grado invece è sempre stato vivo, e riportiamo una sorta di regolo ideato per la soluzione delle equazioni cubiche.
Il "dispositivo" funziona come segue: su un righello graduato su scala lineare viene riportata la curva di equazione $y = x^3$ che viene intersecata con la retta $y = -p\,x - q$, le intersezioni forniscono evidentemente le soluzioni dell'equazione $x^3 = -p\,x + -q$. I coefficienti p e q vengono semplicemente ricavati dall'intersezione con gli assi paralleli del regolo.

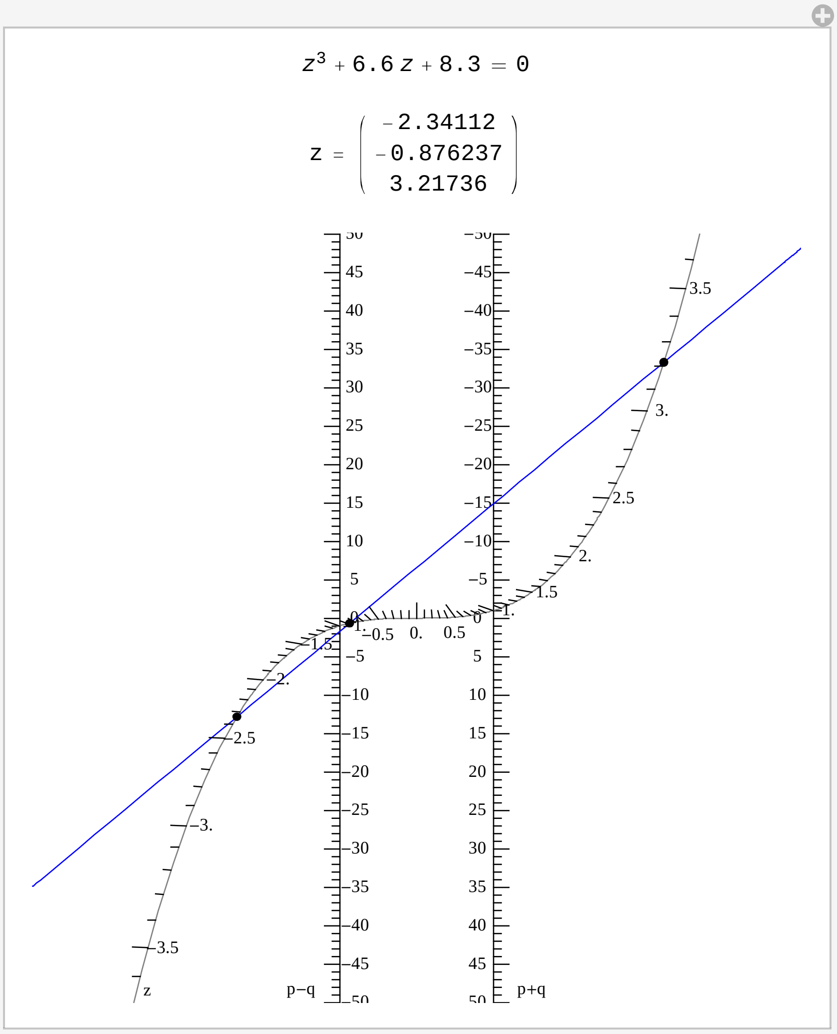


Fig. 46: nomogramma per la soluzione della cubica.

Capitolo VI

Le due anime della Matematica e l'ultimo dei Veda

1 Introduzione

La lettura di questo capitolo, sebbene dedicata a questioni di natura elementare, richiede qualche sforzo in più e qualche conoscenza che va oltre (ma non troppo) quelle superficiali di "calcolo" utilizzate fino ad ora. Cercheremo però di alleviare le sofferenze computazionali, provando ad essere il meno ermetici possibile.

Anche se non detto esplicitamente, quanto discusso nei precedenti capitoli era, tra le altre cose, mirato a suggerire l'idea di come la Matematica possa essere considerata una strana disciplina, o, per meglio dire, molto diversa da ciò che si è soliti intendere. Contrariamente alla convinzione diffusa, icasticamente contenuta nell'antico adagio "la matematica non è una opinione", non la si può considerare libera da sperimentazione e l'idea che essa poggi su basi eterne ed immutabili è, in larga misura, una illusione.

Una delle grandi rivoluzioni intellettuali dello scorso secolo è stata la fine della speranza che, per i sistemi formali in ambito matematico, valesse, e fosse dunque dimostrabile, il criterio di non contraddizione. A tale convinzione pose fine l'opera di Gödel.

Esprimendoci a spanne e riducendo la questione in termini veramente grossolani, potremmo asserire che non esiste alcuna certezza che all'interno di un sistema di assiomi non si giunga alla dimostrazione di due teoremi, ugualmente "veri", che sono l'uno la negazione dell'altro[39].

Questo "scandalo" intellettuale chiudeva il programma di Hilbert e poneva questioni di natura filosofica, che poi si sarebbero riverberate su altre scienze, come la fisica e sulla pretesa della formulazione della cosiddetta "Teoria del Tutto"[40].

Senza indulgere ulteriormente su questi argomenti potremmo asserire che, sebbene si sia persa l'illusione dell'esistenza del principio di non contraddizione, è possibile continuare a fare matematica in assenza di tale certezza. Quello che la storia ha mostrato è che "i principi della deduzione matematica e non solo le teorie matematiche hanno subito cambiamenti nel corso dei secoli"[41].

Inoltre, in alternativa alla concezione "greca" che durante il scorso secolo ha trovato la sua ragion d'essere nella realizzazione del programma di Hilbert e nei suoi epigoni della corrente bourbakista, esiste un modo alternativo di fare matematica

"**ugualmente efficiente, con obiettivi non conflittuali e con metodi in grado di fornire un aiuto reciproco**" (P. Cartier, op. cit.).

Tali concezioni complementari del pensiero matematico hanno radici storiche lontane. Pur nella limitatezza degli argomenti trattati, discutendo le varie forme di matematica che si dipanarono nel corso dei secoli, abbiamo potuto apprezzare l'esistenza di due correnti, grossolanamente ascrivibili al pensiero greco e a quello "orientale" (assiro-babilonese, indiano…). Quest'ultimo percepito quasi fosse antagonista di quello occidentale, che si fece interprete della tradizione greca. Non c'è dubbio che la via occidentale alla matematica portò, dopo il Rinascimento, ad un totale distacco da concezioni ibride marcando vieppiù il territorio di pertinenza verso una identità rigorista, che culminò nel già citato programma Hilbertiano.

Ciononostante si aprivano squarci che nel corso del XVIII e XIX secolo ebbero interpreti diversi e che includono padri venerabili come Eulero, il quale utilizzò con disinvoltura temeraria operazioni sulle serie divergenti, Boole, il fondatore del calcolo simbolico, Heaviside, che creò a sua volta un calcolo simbolico per l'elettromagnetismo e visse in perenne conflitto con i matematici suoi contemporanei ma di orientamento più ortodosso.

Tra la prima e la seconda metà del secolo XIX si assisté alla nascita di una scuola di operazionalisti (Glaisher, Crofton…) che riuscirono a portare i simboli e le operazioni tra questi allo loro conseguenze estreme, creando una metodologia che culminò nelle moderne concezioni del calcolo umbrale.

In larga misura tale modo di concepire la Matematica influenzò la Fisica stessa, e se ne fecero interpreti molti grandi fisici, che dalla tradizione operazionalista attinsero a piene mani e in particolare Feynman che utilizzò (e reinventò) il calcolo operazionale per varie questioni.

In questo capitolo conclusivo cercheremo di raccogliere le fila del discorso che si è dipanato nei precedenti, ritornando su alcuni punti che, forse, non hanno attratto l'attenzione dovuta.

Ma parleremo anche d'altro.

Vorremmo anche fornire una idea di come le due tendenze "alternative" di fare matematica si siano fuse nell'opera di quello che certamente rappresenta l'ultimo grande esponente della tradizione matematica indiana e che pure ha fornito tra i maggiori contributi alla matematica dello scorso secolo.
Parleremo, infatti, di Srinivasa Ramanujan la cui opera e le cui abilità specifiche non sono assolutamente confrontabili con i (grandi) matematici di tradizione "occidentale". Non stiamo facendo riferimento né all'importanza dei contributi, né alle abilità in termini tecnici, ma alla via del tutto originale, apparentemente priva di consequenzialità logica, con cui venivano concepite e presentate le sue ricerche.
Pare che una volta, quando Ramanujan era ragazzino, gli avessero posto come quesito la soluzione del sistema

$$\sqrt{x} + y = 7$$
$$\sqrt{y} + x = 11$$

Una persona "scolarizzata" tenderebbe a ridurre il problema alla soluzione di una equazione di quarto grado, ovvero

$$a(y)^2 - 22\, a\,(y) + 121 - y = 0,$$
$$a(y) = y^2 - 14\, y + 49$$

o ad un'altra analoga espressione per l'incognita x.
Sebbene corretta, la strada da percorrere sarebbe lunga, ma Ramanujan rispose, immediatamente

$$x = 9$$
$$y = 4$$

L'esempio che abbiamo appena discusso non è dissimile da quelli relativi alle equazioni di secondo grado, risolte nei testi vedici sulla base di una intuizione legata alle proprietà di simmetria dell'equazione stessa. La soluzione così ottenuta è incontrovertibilmente vera, naturalmente vera e… come è che non ci avevo pensato?.
Il numero 1729 non dice nulla alla quasi totalità degli esseri umani, ma per Ramanujan era unico, poiché rappresenta "il più piccolo numero esprimibile come somma di due cubi in due modi differenti"

$$1 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

In questo caso è difficile immaginare quale fossero stati i processi mentali che hanno permesso tale conclusione.
Siamo portati a ritenere che gli elementi fondanti della estrema originalità del pensiero di Ramanujan siano essenzialmente due. A parte l'immenso talento naturale, che probabilmente lo poneva sullo stesso piano di Eulero e Gauss, la sua indipendenza culturale nasceva da una educazione formale praticamente inesistente e dall'essere stato avviato alla professione di contabile, ispirata ai metodi di computo degli antichi veda. Cosa che probabilmente aveva affinato la sua naturale inclinazione verso un pensiero matematico fatto di intuizione e di capacità di portare le forme, più che le formule, a conseguenze difficilmente immaginabili eppure naturali.
Toccheremo solo questioni "elementari" e cionondimeno particolarmente illuminanti che permettono di comprendere come queste siano in perfetta risonanza con la concezione matematica indiana che abbiamo discusso nel corso dei primi capitoli.
Vorremmo chiudere questo paragrafo con un quesito, posto dallo stesso Ramanujan, ovvero

quanto vale la seguente relazione

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}} \quad ???$$

Lo sveleremo nel seguito e sarà molto interessante scoprire che la risposta è talmente naturale che non si può fare a meno di dire

"come è che non ci avevo pensato?"

2 Problemi con i compleanni e i numeri civici

Qualche anno fa la televisione italiana aveva una rubrica in cui un nobiluomo dava lezioni di "bon ton" e certamente da queste lezioni il pubblico traeva enorme beneficio. Durante una memorabile trasmissione si discusse su come disporre gli ospiti a tavola se tra i commensali vi fossero stati degli ambasciatori e un nunzio apostolico. Dopo una attenta disamina si giunse ad una corretta definizione della geometria di posizionamento, che avrebbe dovuto tener conto delle relazioni di varia natura tra i paesi di appartenenza degli ambasciatori con la nazione dell'ospite, mentre per il nunzio, in virtù del suo ruolo ecumenico, si sarebbe dovuto considerare una allocazione privilegiata, avulsa da considerazione geopolitiche.

Un giovane maleducato mise il nobiluomo in seria difficoltà chiedendo come si sarebbero dovute cambiare le disposizioni se al contempo fossero stati presenti più nunzi e anche il Dalai Lama.
Morale evitate di invitare ambasciatori e nunzi, se volete evitare di creare un incidente diplomatico o dare l'avvio ad una guerra di religione.
Un ulteriore consiglio che ci sentiamo di dare è quello di evitare di chiedere ad un matematico l'età o l'indirizzo di casa, se non si vuole essere travolti da equazioni diofantee e da altro ancora.

Intorno all'anno 1850 pare fosse stato chiesto a De Morgan[42] quale fosse la sua età, lui rispose che

avrebbe compiuto x anni nell'anno x^2

Il problema di scoprire l'età di questo signore si ridurrebbe ad un equazione di secondo grado, ammettendo infatti che sia nato nell'anno y si deduce che

$y + x = x^2$

dunque

$x = \frac{1+\sqrt{1+4y}}{2}$

A questo punto non sappiamo cosa fare perché non conosciamo y, possiamo però concludere che la quantità sotto radice debba essere un quadrato perfetto e visto che x deve essere intero allora deve trattarsi del quadrato di un numero dispari, ovvero $1 + 4y = (2n + 1)^2$, da cui si evince $y = n(n + 1)$

Proviamo ora a mettere i vari indizi assieme

$y = \frac{m^2-1}{4}$,

$y = n(n + 1) \rightarrow n = \frac{m-1}{2}$

Tenuto anche conto che l'anno era il 1850 possiamo escludere $n = 43$ perché fornisce una data posteriore (1892) e $n = 41$ visto che difficilmente si vive più di 120 anni, la conclusione è pertanto $n = 42$

$y = 42 \cdot 43 \Rightarrow y = 1806$

dunque all'epoca della richiesta De Morgan doveva avere 44 anni.
Semplice!!!

Quando a Ramanujan fu chiesto il suo indirizzo di casa, rispose come segue

"Vivo in una certa strada dove ci sono più di 50 e meno di 500 case, la numerazione dei civici è consecutiva su ogni lato (1,2,3…). Il numero civico della mia abitazione corrisponde ad un numero che è pari alla somma dei civici sul suo lato destro e di quelli sul suo lato sinistro"

Proviamo a risolvere il problema come segue: siano le case in tutto n, e assumiamo che il numero civico della casa di Ramanujan sia m; le indicazioni del problema sono tali da farci scrivere la soluzione nella forma

$1 + 2 + 3 + ... + (m - 1) = (m + 1) + (m + 2) + ... + n$

Se utilizziamo la notazione

$T_r = \sum_{k=1}^{r} k$

otteniamo

$T_{m-1} = T_n - T_{m+1}$

Il nostro problema è quindi quello di trovare il numero intero compreso tra 50 e 500 che soddisfi l'equazione

$T_{m-1} + T_{m+1} = S_n$

Per arrivare alla soluzione del nostro problema dobbiamo prima specificare quanto fa

$T_r = \sum_{k=1}^{r} k = 1 + 2 + 3 + ... + r$

la cui dimostrazione può essere fatta seguendo un ragionamento elementare attribuito ad un giovanissimo Gauss[43].
Consideriamo infatti la seguente procedura per il calcolo della somma dei numeri interi da 1 a 7. All'uopo, ordiniamo la serie in ordine crescente e in ordine inverso su due righe, come mostrato qui sotto

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & + & & & \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & = & & & \\ \hline 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & = & \frac{7\cdot 8}{2} & = & 28 \end{array}$$

eseguiamo la somma dei termini corrispondenti (l’ultimo termine con il primo, il penultimo con il secondo …) e notiamo che il risultato è sempre 8; il doppio della somma cercata sarà pertanto il prodotto di 7 e 8.
Ripetendo il ragionamento per serie più grandi, arriviamo alla formula seguente per induzione

$$T_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

I numeri di questo tipo si dicono numeri triangolari, infatti

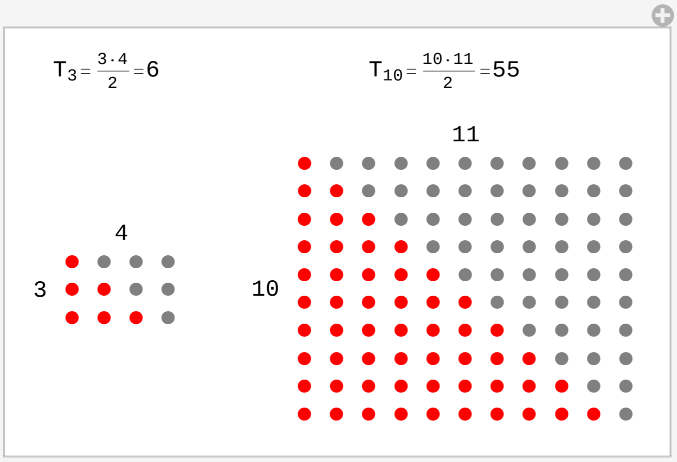


Fig. 47: numeri triangolari.

Il nostro problema si “riduce” dunque alla soluzione dell’equazione

$$\frac{m\,(m-1)}{2} + \frac{m\,(m+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Il primo membro è un quadrato perfetto e pertanto avremo

$$m^2 = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Possiamo dunque concludere che il problema è equivalente alla ricerca di un numero triangolare che sia anche un quadrato perfetto.
Per generare tali numeri, che indicheremo come ${}_Q T_n$, procederemo notando prima di tutto che dalla loro stessa definizione si trova

$$(2\,n + 1)^2 - 2\,(2\,m)^2 = 1$$

Ponendo

$$x = 2\,n + 1$$
$$y = 2\,m$$

Trasformiamo la precedente equazione nella seguente forma

$$x^2 - 2\,y^2 = 1$$

detta equazione di Pell[44] e notiamo che una delle possibili soluzioni è

$$x_0 = 3$$
$$y_0 = 2$$

Facciamo ora le ipotesi che tutte le soluzioni siano esprimibili come

$$\begin{pmatrix} x_{s+1} \\ y_{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s & a\,y_s \\ y_s & x_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se si richiede che per ogni soluzione i-esima soddisfi l'equazione di Pell, troviamo $a = 2$, che garantisce anche che il determinante della matrice di trasformazione sia 1.
La soluzione del sistema precedente può essere ottenuta generalizzando il metodo di Binet (lo impareremo nel seguito), ottenendo

$$x_s = \frac{\left[(3+2\sqrt{2})^s+(3-2\sqrt{2})^s\right]}{2},$$
$$y_s = \frac{\left[(3+2\sqrt{2})^s-(3-2\sqrt{2})^s\right]}{2\sqrt{2}}$$

La soluzione del nostro problema è stata dunque ottenuta ed è fornita da

$$n_s = \frac{x_s-1}{2}$$
$$m_s = \frac{y_s}{2}$$

E i relativi valori vengono riportati nella seguente tabella le cui colonne contengono $s = 1\ldots5$ e i corrispondenti valori di n_s, m_s

s	n	m
1	1	1
2	8	6
3	49	35
4	288	204
5	1681	1189

Stante le condizioni $(50 < n < 1000)$, il numero civico della casa di Ramanujan, corrisponde alla quarta riga $(n = 288,\ m = 204)$.
Problema risolto, ma… fatica sprecata!!!
Perché non conosciamo il nome della via.
A parte le facili amenità di cui sopra, l'esame di un problemino (apparentemente) innocuo ha svelato un mondo, anzi, dei mondi assolutamente nuovi, che cercheremo di intravedere ulteriormente nei prossimi paragrafi.

3 Numeri, poligoni e calcolo simbolico

La discussione e la soluzione dei problemi precedenti sollecitano una riflessione sul significato della matematica stessa e sugli infiniti modi di "pensare" la matematica. Alla domanda del perché ci si possa interessare ad un determinato problema, la risposta potrebbe semplicemente essere "perché è stato posto".
Anche se la cosa può suonare poco professionale, si può avere (sempre che se ne abbiano le capacità) un'ottima produzione matematica, senza alcun bisogno che essa sia inserita all'interno di una strategia che ne detti le motivazioni o specifichi quello che vada fatto e quali siano i limiti di una determinata disciplina.
Cercheremo ora di chiarire meglio cosa vogliamo dire, considerando l'ultimo teorema di Fermat che potrebbe essere considerato come una affermazione priva di alcun significato di natura pratica.
La nozione di pratico non riveste un significato preciso ed è in larga misura fuorviante se non correttamente inquadrata; assumendo come pratico l'applicazione ad un problema di fisica possiamo affermare che, a conoscenza degli autori, tale teorema non ha avuto alcun ruolo, né sembrava avere particolari ricadute nell'ambito della matematica stessa. Gauss ad esempio non se ne è mai occupato e lo considerava assolutamente ininfluente.
Eppure ha tormentato generazioni di matematici. La ricerca di una sua dimostrazione ha portato alla costruzione di un edificio immenso, di cui esso era solo un aspetto marginale, a latere di una teoria estremamente complessa. Pertanto il teorema di Fermat, non avrebbe avuto alcun significato se fosse stato formulato come conseguenza della teoria delle forme modulari[45].
Nello studio di un problema senza alcuna pretesa accademica, ovvero cercando di capire dove abitasse Ramanujan, abbiamo imparato l'esistenza dei numeri triangolari e seguendo questo filo conduttore potremmo andare oltre.
Possiamo infatti definire questa famiglia di numeri come generata da somme del tipo $T_n = \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n\,(n+1)}{2}$. Inoltre, siccome siamo curiosi, possiamo anche chiederci quale sia la somma dei numeri dispari consecutivi e scopriremmo che si ottiene sempre un quadrato perfetto, ovvero

$$\sum_{n=0}^{N-1} (2\,n + 1) = N^2$$

La dimostrazione è veramente banale, in base a quanto abbiamo imparato troviamo infatti che

$$\sum_{n=0}^{N-1}(2\,n+1) = 2\,T_{N-1} + \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 2\,\frac{(N-1)\,N}{2} + N = N^2$$

Possiamo dunque ritenere di aver scoperto accanto ai numeri triangolari quelli quadrati.

Proviamo ora a sommare numeri consecutivi del tipo $3\,n+1$, in questo modo otteniamo una nuova famiglia di numeri detta dei “pentagonali” esplicitamente definita da

$$P_N = \sum_{n=0}^{N-1}(3\,n+1) = 3\,T_{n-1} + n = n\,\frac{3\,n-1}{2}$$

e rappresentati graficamente nelle figura seguente, assieme agli altri

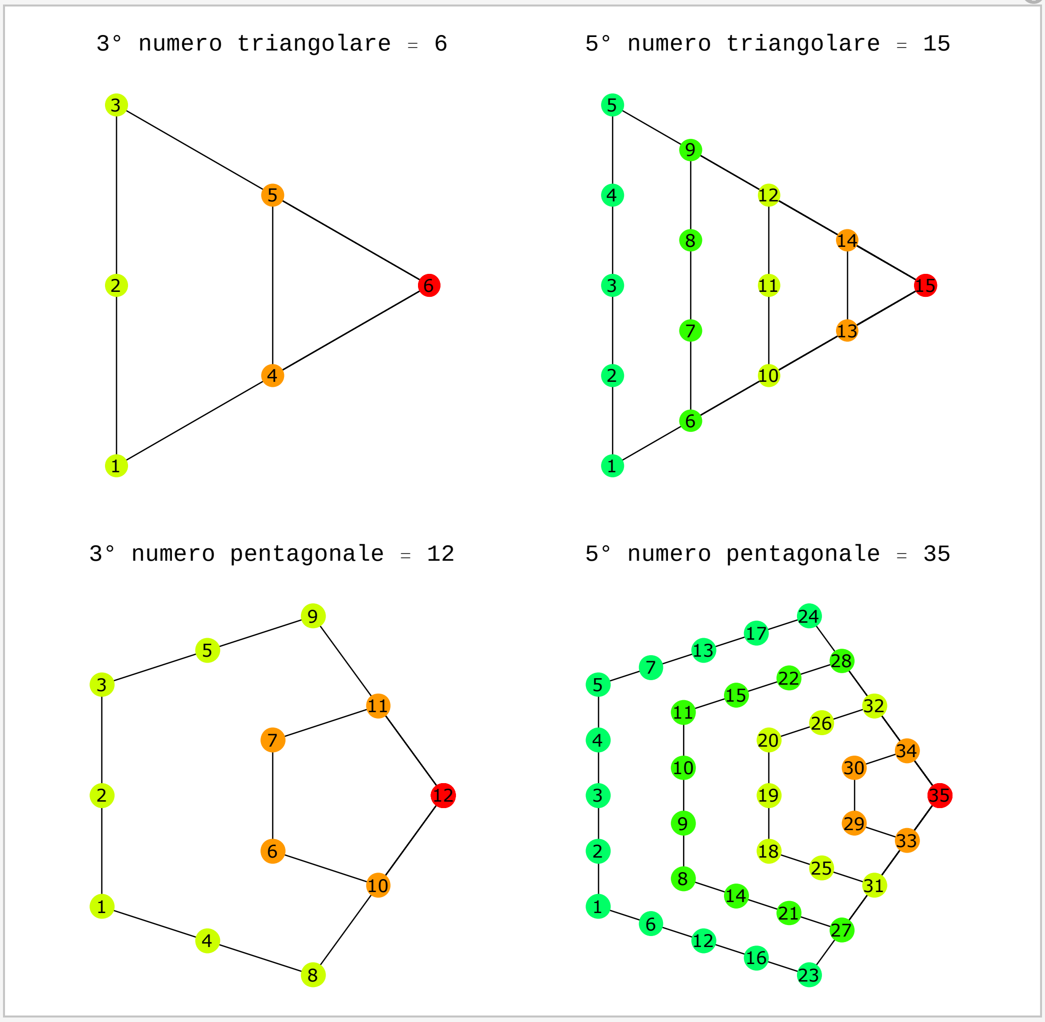


Fig. 48: numeri poligonali (figura adattata http://demonstrations.wolfram.com/PolygonalNumbers [Eric W. Weisstein]).

E inoltre potremmo provare ad estendere la metodologia definendo una classe di numeri tali che

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1}(4\,n+1) = 4\,T_{n-1} + n = n\,(2\,n-1)$$

per scoprire l’esistenza dei numeri esagonali.
Infine potremmo azzardare anche operazioni di uguaglianza formale del tipo

$$E_N = T_{2\,N-1},$$
$$P_N = \frac{1}{3}\,T_{3\,N-1}$$

La procedura a questo punto diventa abbastanza sterile (ma se uno vuole continuare a divertirsi per questa via perché impedirglielo) se ci limitassimo solo a classificare famiglie di numeri. Notiamo però che la ricerca di un numero che fosse triangolare e quadrato ci ha trascinati verso l’equazione di Pell e verso la soluzione di equazioni alle differenze del tipo

$$x_{s+1} = 3\,x_s + 4\,y_s,$$
$$y_{s+1} = 3\,y_s + 2\,x_s$$

Per quanto concerne la soluzione di tale sistema abbiamo frettolosamente archiviato il problema facendo riferimento alla generalizzazione della formula di Binet. Ora invece affronteremo il problema imparando a utilizzare un formalismo operazionale, che permette di risolvere, in modo elementare, problemi che sarebbero molto più involuti seguendo una procedura convenzionale.
All'uopo riscriviamo il nostro sistema introducendo una entità matematica, che diremo operatore di spostamento definito come segue

$$\hat{E}\, f_k = f_{k+1}$$

L'operatore $\hat{E}$ agisce sull'indice k facendogli semplicemente fare un salto di una unità, è altresì chiaro che se ammettessimo l'esistenza di potenze dell'operatore stesso, potremmo definire la loro azione sull'indice k attraverso la relazione

$$\hat{E}^m\, f_k = f_{k+m}$$

Ovvero la potenza m-sima dell'operatore di spostamento determina un salto di m unità dell'indice discreto.
Servendoci di tale strumento formale possiamo riscrivere il nostro sistema come

$$(\hat{E} - 3)\, x_s = 4\, y_s,$$

$$(\hat{E} - 3)\, y_s = 2\, x_s$$

Moltiplicando ora la prima equazione per $(\hat{E} - 3)$ otteniamo

$$(\hat{E} - 3)\,(\hat{E} - 3)\, x_s = 4\,(\hat{E} - 3)\, y_s$$

Tenuto ora conto che per gli operatori $\hat{E}$ valgono le regole algebriche ordinarie, troviamo che

$$(\hat{E} - 3)\,(\hat{E} - 3) = (\hat{E} - 3)^2 = \hat{E}^2 - 6\,\hat{E} + 9$$

Dall'azione dei singoli operatori otteniamo la seguente equazioni alle ricorrenze

$$x_{s+2} - 6\, x_{s+1} + 9\, x_s = 8\, x_s$$

A questo punto possiamo utilizzare il metodo di Binet all'equazione alle differenze

$$x_{s+2} - 6\, x_{s+1} + x_s = 0,$$
$$x_0 = 1,\ \ x_1 = 3$$

Come utile esercizio il lettore potrebbe ricavare le forme generali dei numeri poligonali di seguito riportati

ettagonale	$\frac{1}{2}\, n\, (5\, n - 3)$
ottagonale	$n\, (3\, n - 2)$
ennagonale	$\frac{1}{2}\, n\, (7\, n - 5)$
decagonale	$n\, (4\, n - 3)$

e studiare l'equazione di Pell relativa a quelli che sono anche quadrati.
Nel caso dei numeri pentagonali quadrati si ricava, ad esempio, la seguente equazione diofantea

$$x^2 - 6\, y^2 = 1$$

Infine vorremmo attirare l'attenzione su relazioni del tipo

$$T_{49} = Q_{35},$$
$$T_{285} = P_{165} = H_{143}$$

Invitando il lettore a chiarirne il significato.

Abbiamo prima accennato al teorema di Fermat, che era uno di una serie di teoremi che sfidarono per secoli schiere di matematici professionisti e dilettanti. A questa ultima categoria apparteneva Pierre De Fermat, magistrato di professione. Per completezza riportiamo di seguito i teoremi che costituiscono l'aritmetica di Fermat e che erano i passatempi con cui il compassato magistrato del distretto di Tolosa si trastullava per rilassarsi dopo il lavoro, nelle sere d'inverno del XVII secolo quando il calcolo sublime muoveva i suoi primi passi:

1. ogni numero primo della forma $4n + 1$ è somma di due quadrati;
2. ogni numero primo della forma $6n + 1$ è somma di un quadrato e del triplo di un quadrato;
3. ogni numero primo della forma $8n + 1$ e $8n + 3$ è somma di un quadrato e del doppio di un quadrato;
4. ogni intero è somma di tre triangolari, quattro quadrati, cinque pentagonali, sei esagonali, ecc. (teorema sui numeri poligonali);
5. l'equazione $x^2 - D\,y^2 = 1$ ha sempre soluzione in interi, essendo D un intero, ma non un quadrato;
6. le equazioni $x^2 + 2 = y^3$ e $x^2 + 4 = y^3$ hanno come sole soluzioni intere (5,3) e (2,2), (11,5) rispettivamente.

Un innocente problema ci ha portato abbastanza lontano, ma c'è ancora tanto da dire.

4 Somme, numeri di Bernoulli e calcolo umbrale

Visto che abbiamo soddisfatto un certo numero di curiosità, proviamo a farcene venire altre, cercando di scoprire se esista una formula che fornisca la somma dei quadrati, dei cubi, delle quarte potenze…dei numeri naturali consecutivi fino a N, ovvero

$$S_m(N) = \sum_{n=0}^{N} n^m$$

Archimede aveva ottenuto che[46] (per brevità omettiamo l'argomento N)

$$S_2 = \frac{(2\,N+1)}{3}\,S_1$$

Nicomaco di Gerasa era giunto alla conclusione

$$S_3 = S_1^2$$

Il matematico arabo Ibn-al-Haitam dimostrò che

$$S_4 = \frac{S_2}{5}\,(6\,S_1 - 1)$$

Un matematico tedesco, Johan Falhauber, un tempo noto come il grande aritmetico di Ulm e che oggi nemmeno gli addetti ai lavori ricordano, spese quasi tutta la sua esistenza per studiare somme relative a potenze crescenti, senza però riuscire a classificarle tutte.
Jacob Bernoulli (un matematico che ora tutti ricordano) impegnò mezz'ora per calcolarle tutte e ci riuscì, proponendo una nuova e stupefacente famiglia di numeri che oggi portano il suo nome[47].
Proviamo ora ad eseguire il seguente calcolo

$$s = 1 + t + t^2 + \ldots t^N = \sum_{n=0}^{N} t^n$$

Il risultato è noto dai testi di algebra elementari, ma lo riproporremo perché molto istruttivo e utile per la discussione futura.
Moltiplicando ambo i membri della relazione precedente per t si ottiene la seguente relazione

$$t\,s = s + t^{N+1} - 1$$

che ci permette di ridurre il calcolo di una somma ad una equazione di primo grado, che fornisce

$$s = \frac{t^{N+1}-1}{t-1}$$

allo stesso modo siamo in grado di dimostrare che la seguente somma

$$S(\vartheta) = \sum_{n=0}^{N} e^{n\,\vartheta}$$

è data da

$$S(\vartheta) = \frac{e^{(N+1)\,\vartheta}-1}{e^{\vartheta}-1}$$

Perché questo risultato è importante?
Notiamo prima di tutto che

1. $\lim_{\vartheta\to 0} S(\vartheta) = S_0 = (N+1)$
2. $\lim_{\vartheta\to 0} \frac{d}{d\,\vartheta}\,S(\vartheta) = S_1$

La prima identità è una semplice conseguenza della regola dell'Hopitàl[48], la seconda è altrettanto banale, ma viene di seguito riportata perché è importante

$$\frac{d}{d\vartheta} S(\vartheta) = \frac{e^{\vartheta}(1-e^{N\vartheta})+N\ e^{\vartheta(n+1)}(1-e^{\vartheta})}{(e^{\vartheta}-1)^2}$$

applicando di nuovo la regola dell'Hopitàl si ottiene quanto indicato al secondo punto.
Un risultato più generale è il seguente

$$\left(\frac{d}{d\vartheta}\right)^r \sum_{n=0}^{N}\left(e^{n\vartheta}\right)|_{\vartheta=0} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{d}{d\vartheta}\right)^r \left(e^{n\vartheta}\right)|_{\vartheta=0} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N} n^r\left(e^{n\vartheta}\right)|_{\vartheta=0} = S_r\,(N)$$

Il metodo della funzione generatrice ci ha permesso di concludere che le somme S_n sono "generate" dalla funzione $S\,(\vartheta)$, secondo la relazione

$$S\,(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n\,(N)\,\vartheta^n}{n!}$$

Abbiamo stabilito un risultato importante perché siamo riusciti a legare le somme di Falhauber in un contesto unitario.
Proviamo ora a fare qualche ulteriore progresso di natura pratica. Riscriviamo la funzione generatrice nella seguente forma

$$S\,(\vartheta) = B\,(\vartheta)\,K\,(\vartheta)$$
$$B\,(\vartheta) = \frac{\vartheta}{e^{\vartheta}-1}$$
$$K\,(\vartheta) = \frac{e^{(N+1)\,\vartheta}-1}{\vartheta}$$

La funzione $B\,(\vartheta)$ è nota come la generatrice dei numeri di Bernoulli B_n, secondo la formula

$$B\,(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}\,\vartheta^m$$

Mentre, per quanto concerne lo sviluppo della funzione $K\,(\vartheta)$ avremo

$$K\,(\vartheta) = \sum_{r=0}^{\infty}(N+1)^r\,\frac{\vartheta^r}{(r+1)!}$$

Mettendo assieme le due serie si ottiene[49]

$$S\,(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\frac{\vartheta^n}{n!},$$
$$C_n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} B_{n-r}\quad\frac{(N+1)^r}{r+1}$$

e possiamo dunque concludere che

$$S_n\,(N) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} B_{n-r}\,\frac{(N+1)^{r+1}}{r+1}$$

Come calcolare esplicitamente i numeri B_n? La procedura di calcolo è semplice ma noiosa.
La via più diretta è tramite lo sviluppo in serie della funzione generatrice, proviamo però ad eseguire un metodo approssimato. Al secondo ordine nello sviluppo in ϑ si ha

$$S\,(\vartheta) \cong \frac{1}{1+\frac{\vartheta}{2}\,(1+\frac{\vartheta}{3})} \cong 1 - \frac{1}{2}\,\vartheta + \frac{1}{12}\,\vartheta^2$$

Da cui segue

$$B_0 = 1,\;\; B_1 = -\frac{1}{2},\;\; B_2 = \frac{1}{6}$$

Iterando la procedura si calcolano i termini successivi. Il punto di arrivo è la seguente formula ricorsiva

$$B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k} B_k$$

si noti che i numeri di Bernoulli con indice dispari (eccetto $n = 1$) sono tutti nulli.
Più in generale i numeri di Bernoulli sono forniti dalla seguente relazione

$$B_k = \frac{(-1)^k\,k}{2^k-1}\sum_{r=1}^{k} 2^{-r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}(j+1)^{k-1}$$

Tutto qui?
No c'è di meglio!!!
Quello che è nascosto dietro i numeri di Bernoulli è qualche cosa di più che va forse al di là di quanto Bernoulli stesso riuscisse ad immaginare.

Esiste una branca della matematica detta *calcolo umbrale*, la prima volta che ne venimmo a conoscenza cominciammo a fantasticare considerando una sorta di mito della caverna di Platoniana memoria applicato alla matematica, in cui le formule matematiche erano le “ombre”, proiettate su una qualche dimensione, di forme più profonde.
Non era così, ma non ci eravamo andati del tutto lontano.
L’idea del calcolo umbrale sviluppata in epoca recente da Roman e Rota, ma radicata in concezioni matematiche dei già citati operazionalisti del secolo XIX[50], nasceva dalla semplice constatazione che a volte è conveniente, dal punto di vista computazionale, trattare una serie del tipo

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

come una funzione esponenziale a patto di trasformare $a_n \to \hat{a}^n$ ovvero innalzare l’indice della successione al rango di potenza. In tal caso potremo scrivere

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{a}^n}{n!} x^n = e^{\hat{a}\, x}$$

La procedura è applicabile ai numeri di Bernoulli per cui avremo

$$B(\vartheta) = e^{\hat{B}\,\vartheta}$$

ed inoltre

$$S_n(N) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \hat{B}^{n-r} \frac{(N+1)^{r+1}}{r+1}$$

Trattando N come una ordinaria variabile possiamo calcolare la derivata della funzione S rispetto ad N, in modo da ottenere

$$\frac{d}{dN} S_n(N) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \hat{B}^{n-r} (N+1)^r = \left(\hat{B} + N\right)^n$$

ovvero da ridurre tutto ad un ordinario binomio di Newton. A questo punto possiamo ottenere un ulteriore risultato, ovvero possiamo calcolare la somma $S_n(N)$ tramite il seguente integrale

$$S_n(N) = \int_0^N (\hat{B} + \tilde{N})\, d\tilde{N} = \frac{\left(\hat{B}+N\right)^{n+1} - \hat{B}^{n+1}}{n+1}$$

non sappiamo cosa rappresenti per voi, ma per noi è un risultato sublime!!!
Per apprezzare, poniamo il problema del calcolo di somme di somme, ovvero quale è il valore di

$$T(N, M) = \sum_{n=0}^{M} S_n(N)$$

Se avessimo posto tale quesito a Bernoulli è probabile che non sarebbe stato capace di rispondere[51], noi sì e invitiamo il lettore a cercare una risposta.
Prima di chiudere questo paragrafo faremo riferimento ai polinomi di Bernoulli, definiti come

$$B_n(x) = \left(\hat{B} + x\right)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \hat{B}^{n-s} x^s = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_{n-s}\, x^s$$

Il vantaggio di trattare i numeri di Bernoulli come delle ordinarie potenze è estremamente vantaggioso, possiamo ad esempio stabilire la seguente proprietà

$$B_n(x+y) = \left(\hat{B} + x + y\right)^n = \left(\left(\hat{B} + x\right) + y\right)^n =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_{n-s}(x)\, y^s$$

A questo punto è necessaria una precisazione onde non incorrere in errori grossolani. Il prodotto $\hat{B}^n \hat{B}^m$ non è il prodotto di due numeri di Bernoulli, ma va inteso come

$$\hat{B}^n \hat{B}^m = \hat{B}^{n+m} = B_{n+m} \neq B_n B_m$$

Possiamo ad esempio stabilire la seguente identità

$$B_n = \frac{1}{2^n} (\hat{B} + \hat{B})^n = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_{n-s} B_s$$

o il seguente teorema di duplicazione

$$B_{2n}(x) = (\hat{B} + x)^n (\hat{B} + x)^n = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \binom{n}{r} B_{r+s}\, x^{2n-r-s}$$

Infine, va quasi da sé che i polinomi di Bernoulli sono generati da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(x) = e^{t\left(\hat{B}+x\right)} = \frac{t\, e^{t x}}{e^t - 1}$$

Quale è dunque il messaggio dietro il precedente formalismo: "semplicemente" che esiste una sorta di livello superiore di astrazione in cui forme complesse possono essere ridotte a semplici entità algebriche che rispettano le stesse regole formali degli originari monomi.

In matematica esistono pletore di famiglie di numeri analoghe a quelle di Bernoulli e che in qualche modo ne "mimano" le proprietà.

La sviluppo in serie della funzione

$$f(t) = \operatorname{sech}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}$$

scritto nella forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E_n$$

viene di solito utilizzato per definire i numeri E_n detti numeri di Eulero.

La serie

$$g(t) = \frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G_n = e^{t\hat{G}}$$

definisce i numeri di Genocchi.

La funzione

$$s(t) = \frac{2t^2}{e^{2t} - 1}$$

avrebbe, ad esempio, come corrispettivo umbrale

$$s(t) = e^{t(\hat{B}+\hat{G})}$$

e tali forme possono essere utilizzate, molto vantaggiosamente, per semplificare i calcoli. La primitiva della funzione $g(t)$, può, ad esempio, essere scritta come

$$\int_0^t g(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\hat{G}} \left(e^{t\hat{G}} - 1\right)$$

giocando sempre con i simboli scopriamo anche che

$$f(t) = \frac{2e^{\frac{t}{2}}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{2}\right) \frac{t^{n-1}}{n!}$$

Invitiamo il lettore a definire una qualche relazione tra queste famiglie di numeri.

Le implicazioni dal calcolo umbrale sono vaste e profonde, l'esempio prima riportato è solo uno delle sue vaste implicazioni, che hanno aperto una sorta di rivoluzione, non ancora del tutto compiuta. Le implicazioni dei metodi vanno molto al di là degli scopi di questo libro, ma ci sembrava doveroso darne almeno un cenno.

5 Ancora numeri: quelli "Fortunati" di Eulero, di Heegner, i Quasi-Interi di Ramanujan, i numeri Felici…

Eulero aveva dimostrato che il trinomio

$$p(n) = 2\, T_{n-1} + 41 = n^2 - n + 41$$

genera 40 numeri primi distinti per $n \leq 40$ e questi costituiscono un caso particolare di una classe di numeri detti appunto "numeri fortunati di Eulero".

Il fatto di per sé potrebbe però non essere particolarmente rilevante, ma proviamo ad affrontarlo da un altro punto di vista. La fattorizzazione di $p(n)$ scritta come

$$p(n) = (n - A_+)(n - A_-),$$

$$A_+ = \frac{1 + \sqrt{-163}}{2}$$

non rivela nulla di straordinario, a parte l'osservazione banale che 163 è un numero primo. In base a quanto abbiamo imparato sugli irrazionali quadratici e sulla Q-trigonometria potremmo introdurre le funzioni "circolari" associate

$$ {}_A C(\delta) = \frac{A_+ e^{A_- \delta} - A_- e^{A_+ \delta}}{2\sqrt{-163}}, $$

$$ {}_A S(\delta) = \frac{e^{A_- \delta} - e^{A_+ \delta}}{2\sqrt{-163}} $$

e la funzione "complessa"

$$ {}_A E(\delta) = e^{A_+ \delta} = e^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-163}\right)\delta} $$

Come abbiamo già visto tali funzioni generalizzano le formule di Eulero, pertanto potrebbe essere naturale chiedersi se la famosa relazione $e^{i\pi} = -1$ abbia, in questo contesto, una qualche analogia.

$$ {}_A E(-2\, i\, \pi) = e^{-i\pi}\; e^{\pi\sqrt{163}} = -1\, e^{\pi\sqrt{163}} $$

il numero $e^{\pi\sqrt{163}}$ potrebbe essere il più banale di questo mondo, non fosse altro perché è trascendente e un quasi intero, ovvero

$$ e^{\pi\sqrt{163}} = 262\ 537\,412\ 640\ 768\,743.99999999999925\ \ldots $$

Oggi questo numero viene detto costante di Ramanujan.
Ma, a parte questa proprietà, cosa rende questo numero interessante?
Consideriamo ora il trinomio

$$ q(m) = m^2 - m + \frac{h+1}{4} $$

anche questo genera numeri primi in corrispondenza di $m < 1 < \frac{h-3}{4}$ se h è un numero di Heegner, ovvero $h = 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163$, i quali, a loro volta generano famiglie di numero di Eulero Fortunati.
Una annotazione è a questo punto doverosa: si sconsiglia vivamente di giocare questi numeri al Super Enalotto: la ragione della dizione "fortunati" non è assolutamente chiara o è una astrazione matematica che nulla ha a che fare con la venalità di una vincita.
La scomposizione del trinomio $q(m)$ in irrazionali quadratici del tipo

$$ H_+ = \frac{1+\sqrt{-h}}{2} $$

dà luogo a famiglie di quasi interi di Ramanujan espressi come $e^{\pi\sqrt{h}}$ e che nell'ambito della Q-trigonometria potrebbero essere interpretati come una generalizzazione dell'unità immaginaria. E' ora legittimo chiedersi

"Che senso ha tutta questa discussione?"

In verità non sappiamo rispondere, ma possiamo fare qualcosa per aumentare lo sconcerto, proponendo alla riflessione del lettore la seguente uguaglianza

$$ \sqrt[3]{e^{\pi\sqrt{h}} - 744} \cong N, $$
$$ h \geq 19 $$

dove N è un intero.
Possiamo fare anche di più per screditare il mondo dei matematici definendo numeri *felici* ed *infelici*.
Il numero 19 è dispari, primo e… felice.
Le due prime affermazioni non hanno bisogno di commenti, la terza forse sì.
Consideriamo il seguente processo

$$ 19 \rightarrow 1^2 + 9^2 = 82 \rightarrow 8^2 + 2^2 = 68 \rightarrow $$
$$ \rightarrow 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 $$

pertanto 19 è un numero felice!!!
Non è chiaro?!
Consideriamo 23

$23 \to 2^2 + 3^2 = 13^2 \to 1^2 + 3^2 = 10 \to$
$\to 1^2 + 0^2 = 1$

Dunque 23 è un numero felice!!!
a questo punto dovrebbe essere chiaro, ma se proprio non dovesse esserlo consideriamo 28

$28 \to 2^2 + 8^2 = 68 \to 6^2 + 8^2 = 100 \to$
$\to 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

anche 28 lo è!!!
Evidentemente un numero è felice se la procedura di somma dei quadrati delle cifre che lo compongono e che compongono i numeri ottenuti tramite tale procedure termina con 1.
La definizione di numero felice si estende anche al caso delle somme di cubi, *infelici* sono i numeri che non soddisfano tale sequenza e ancora peggio quelli che drammaticamente riproducono se stessi, come ad esempio

$133 \to 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55 \to 5^3 + 5^3 = 250 \to$
$\to 2^3 + 5^3 + 0^3 = 133 \to ....$

come è infelice 133!!!
E … quasi per finire i numeri *perfetti* ovvero quei numeri uguali alla somma dei loro divisori escluso il numero stesso

$6 = 1 + 2 + 3,$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

e… i numeri amici, i numeri maschi, i numeri femmina, i numeri fidanzati, i numeri abbondanti…

■ 6 Frazioni continue ed equazioni diofantee[52]

Diofanto di Alessandria visse tra il III e IV secolo dopo Cristo e la durata della sua vita è desumibile dal seguente problema riportato come epitaffio sulla sua tomba.

La sua giovinezza durò 1/6 della sua vita;
poi la sua barba iniziò a crescere dopo 1/12;
si sposò dopo 1/7 e gli nacque un figlio dopo 5 anni.
Il figlio visse la metà degli anni del padre e
il padre morì 4 anni dopo il figlio.
Quanti anni visse Diofanto?

certamente un modo originale e sintetico per certificare le tappe importanti di una esistenza e per certificare la propria dipartita.
Diofanto si occupò per primo di equazioni in più variabili che ammettono soluzioni solo in termini di numeri interi.
Problemi di questo tipo sono stati toccati più volte nel corso di questo e dei capitoli precedenti. L'equazione di Pell e un esempio di equazione diofantea, così come

$2\,x + 3\,y = 11,$
$7\,x^2 - 5\,y^2 + 2\,x + 4\,y - 11 = 0$
$y^3 + x^3 = z^3$

Il problema relativo agli esempi precedenti è determinare se tali equazioni ammettano soluzioni nel dominio dei numeri interi e, a parte il caso lineare è tutt'altro che banale.
Il decimo problema di Hilbert, uno dei 23 da lui proposti nel 1900 e che avrebbero guidato lo sviluppo della matematica del XX secolo, riguardava proprio la richiesta di un metodo "universale" per la soluzione di equazioni Diofantee.
La risposta venne 70 anni dopo e infatti Mateyasivich dimostrò che è insolubile. Detto in termini meno approssimativi il teorema suona come segue

data una generica equazione diofantea, non esiste alcun algoritmo che possa predire se tale equazione abbia una soluzione oppure no.

Si noti che il teorema fa riferimento ad "algoritmo" un concetto che va integrato con la nozione di "computabilità" introdotta da Gödel, Kleene e Turing negli anni '30. Riteniamo opportuno spendere due parole su tale argomento, perché perfettamente in linea con la discussione precedente.
La risolubilità di un problema è legato alla sua computabilità che è a sua volta legato ad una "macchina", ovvero ad un

formalismo, in grado di calcolare funzioni associate ad un determinato problema. Turing ha definito una macchina appropriata (la “macchina di Turing”) che computa la funzione associata ad un certo problema in un numero finito di passi. Se questo non è possibile la funzione non è computabile e quindi il problema non è risolvibile o come si dice in gergo non è decidibile.
Dopo questo doveroso richiamo passiamo ad un problema specifico, che coinvolge la soluzione di una equazione diofantea lineare

Una cooperativa deve costruire un certo numero di appartamenti spendendo 80.000 Euro per ognuno e alcuni capannoni a 50.000 euro ciascuno, il budget è di 810.000 Euro, quanti appartamenti e capannoni si riusciranno a realizzare?

Se utilizziamo x per indicare il numero degli appartamenti e y per il numero di capannoni, otteniamo

$$80\,000\ x + 50\,000\ y = 810\,000$$

equivalente a

$$8\,x + 5\,y = 81 \ \Rightarrow\ y = -\frac{8}{5}\,x + \frac{81}{5}$$

Se non avessimo limitazioni di sorta tutte le coppie di numeri $(x,\ y)$ con $y = -\frac{8}{5}\,x + \frac{81}{5}$ sarebbero accettabili. Evidentemente le uniche possibili sono coppie di numeri interi e non negative, nel nostro caso {2,13} e {7,5} (si veda la figura seguente).

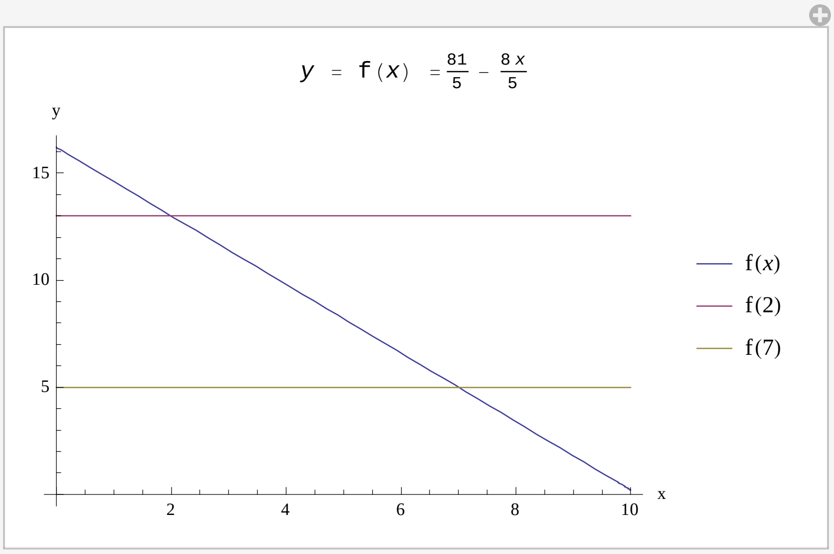


Fig. 49: soluzione dell'equazione 80000 x + 50000 y = 810000.

Abbiamo trovato la nostra soluzione per tentativi ma un metodo più appropriato potrebbe essere certamente più efficace per risolvere una intera classe di problemi.
Vediamo ora come si possa scrivere una soluzione in termini meno “artigianali”.

Consideriamo pertanto l’equazione

$$m\,x + n\,y = p \quad \text{con}\ \ m,\ n,\ \ p \in N$$

e con x e y incognite del nostro problema con la restrizione che siano intere. Indichiamo con il simbolo $(a,\ b)$ il massimo comun divisore (mcd) tra i numeri a e b. Diremo che la nostra equazione ammette infinite soluzioni se il termine non omogeneo p della equazione è divisibile per il massimo comun divisore dei coefficienti lineari. Il primo passo verso la soluzione è la ricerca di una soluzione particolare, che scriveremo come segue

$$x_0 = \frac{r\,c}{(m,\,n)},\ \ y_0 = \frac{s\,c}{(m,\,n)}$$

con r e s due interi qualsiasi. Tutte le altre soluzioni sono legate a questa da

$x = x_0 + n \frac{k}{(m, n)}$,
$y = y_0 + m \frac{k}{(m, n)}$,
$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ ...$

Non è difficile a questo punto stabilire la correttezza delle soluzioni relativamente al problema precedente, che, pur ammettendo infinite soluzioni intere, ha limitazione legate alla positività e ai valori assoluti.
Il problema potrebbe essere risolto in termini ancora più generali; consideriamo pertanto l'equazione

$a x + b y = c$

con a e b interi, fatto lo sviluppo in frazione continua di

$\frac{a}{b} = [a_1, \ a_2, \ ... \, a_n]$

ne definiamo le ridotte $p_n, \ q_n$; una soluzione particolare è

$x_0 = p_{n\text{-}1}$,
$y_0 = q_{n\text{-}1}$

cosicché tutte le altre diventano

$x = c \, q_{n\text{-}1} - k \, b$,
$y = - c \, p_{n\text{-}1} + a \, k$

La dimostrazione è semplice. Vogliamo, però, aggiungere per completezza la verifica che la relazione precedente rappresenta la soluzione del problema. Inserendo la soluzione nell'equazione e utilizzando la proprietà delle ridotte $a \, q_{n\text{-}1} - b \, p_{n\text{-}1} = 1$, concludiamo facilmente che

$a \, (c \, q_{n\text{-}1} - k \, b) + b \, (-c \, p_{n\text{-}1} + a \, k) = 1 \ \ \Rightarrow \ \ c \, (a \, q_{n\text{-}1} - b \, p_{n\text{-}1}) = c$

Il seguente problema ha origini molto antiche[53] ma appare di tanto in tanto. Noi ne proponiamo una forma modificata adattata "ai tempi che corrono"

Cinque senatori preoccupati per la recente riforma del senato rastrellano quanto riescono a sottrarre alle casse dello stato, con l'accordo che avrebbero diviso equamente: "stecca para" come si dice in gergo senatoriale e non solo.
Però non si tratta di un accordo tra gentiluomini e nottetempo uno dei protagonisti si sveglia e divide il malloppo in cinque mucchi uguali di milioni di euro e scopre che un milione di euro è avanzato. Poiché è un senatore della repubblica ed è previdente, prende la parte spettante e anche il milione di euro in più per realizzare un plafond per fondi neri (non si sa mai!!!). Un secondo senatore fa la stessa pensata e opera allo stesso modo sulla parte di milioni residua: divide in cinque mucchi uguali, si accorge che avanza un milione e procede come il suo collega. Così fanno gli altri che rimangono.
La mattina dopo con serenità senatoriale si dividono quanto è rimasto, ma questa volta non avanza nulla.
Quale è il numero di milioni originariamente prelevati dai cinque?

La ricerca della soluzione non è un compito difficile, ma è divertente.
Se M è il numero di milioni originali, avremo che il primo senatore ne recupera $m_1 = \frac{M\text{-}1}{5}$ e ne lascia $\frac{4}{5} (M - 1)$; il secondo senatore ne lascia $m_2 = \frac{4}{5} (m_1 - 1)$; iterando la procedura troveremo

$m_n = \frac{4}{5} (m_{n\text{-}1} - 1)$,
$m_0 = M$

Il quinto senatore avrà dunque lasciato un numero di milioni che è un multiplo di 5, per cui

$m_5 = 5 \, y$,
$m_5 = \frac{1024 \times (-8404)}{3125}$

La soluzione del problema, riportata di seguito con una procedura di automazione, rivela che il numero originale di milioni è 3121 e nella distribuzione finale ne toccano 204 a parte quelli messi da parte in precedenza.
I singoli senatori diranno addio alle istituzioni con una buonuscita in milioni di euro

$S_1 = 703, \ S_2 = 603, \ S_3 = 523, \ S_4 = 429, \ S_5 = 408$

Quale morale ne deriva?

■ 7 Radicali ripetuti

Ci siamo allontanati abbastanza semplicemente seguendo il filo dei nostri pensieri e abbiamo fatto un piccolo tour partendo da un problema apparso su un giornale di enigmistica popolare.
Torniamo però a Ramanujan, il supposto soggetto di questo capitolo.
Nel già citato articolo di Cartier, Ramanujan viene ascritto ad una specie molto particolare di matematici che egli chiama *matemagici,* di cui è difficile definire la fisionomia, che però non è difficile da immaginare. La caratteristica principale di tale genia è quella di trarre da una relazione assolutamente banale un risultato tutt'altro che evidente e …viceversa.
Noi tutti non abbiamo alcuna difficoltà ad accettare il fatto che

$$x = \sqrt{x\sqrt{x^2}}$$

La sua iterazione in termini di radicali ripetuti è meno evidente, però, sostituendo "compulsivamente" $x^2 \to x\sqrt{x^2}$ non è difficile concludere che

$$x = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\,....}}}}}$$

Da cui segue ad esempio che

$$2 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\,....}}}}}$$

che certamente non una identità del tutto banale, come quella di partenza. D'altro canto poiché

$$x = \sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\,...}}}$$

siamo autorizzati ad affermare che

$$2 = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\,...}}}}$$

La seguente identità è altrettanto scontata

$x^2 = x + x\,(x - 1)$

Inoltre, limitandoci ai soli numeri positivi, estraendo la radice di ambo i membri e limitandoci ai soli numeri positivi, otteniamo

$x = \sqrt{x + x\,(x - 1)}$

In base a quanto abbiamo imparato sui radicali ripetuti potremo scrivere

$$x = \sqrt{x + (x - 1)\sqrt{x + (x - 1)\sqrt{x + \,...}}}$$

da cui discendono le identità

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}\ ,$$

$$3 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{\ldots}}}}\ ,$$

$$4 = \sqrt{4 + 3\sqrt{4 + 3\sqrt{4 + 3\sqrt{\ldots}}}}\ ,$$

...

E' altrettanto vero che

$$x = \sqrt[3]{x + x\,(x^2 - 1)}$$

Da cui possiamo anche dedurre che

$$2 = \sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2}\ \ldots}}}$$

o, estendendo il metodo,

$$2 = \sqrt[n]{2 + (2^{n-1} - 1)\sqrt[n]{2 + (2^{n-1} - 1)\sqrt[n]{2 + (2^{n-1} - 1)\sqrt[n]{2}\ \ldots}}}$$

Che costituiscono identità certamente meno banali di quelle di partenza.
Consideriamo ora la relazione

$$n\,(n + 2) = n\sqrt{1 + (n + 1)\,(n + 3)}$$

e definiamo

$$f_n = n\,(n + 2)$$

È evidente che l'identità di partenza ci permette di scrivere

$$f_n = n\sqrt{1 + f_{n+1}}$$

Che, ulteriormente iterata, fornisce la seguente identità espressa in termini di radicali ripetuti

$$f_n = n\sqrt{1 + (n + 1)\sqrt{1 + f_{n+2}}} =$$

$$= n\sqrt{1 + (n + 1)\sqrt{1 + (n + 2)\sqrt{1 + f_{n+3}}}} = \ldots$$

Poiché $f_1 = 3$ otteniamo la soluzione al quesito esposto nel paragrafo precedente, semplicemente notando che

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Semplice e naturale!!!
Elevando al quadrato ambo i membri della precedente identità troviamo

$$9 = 1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 = \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \ldots}}}}$$

e ancora

$$5=\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Tale procedura, ripetuta per un congruo numero di volte, ci condurrebbe a dedurre la ricorrenza da cui abbiamo generato l'identità del quesito di Ramanujan.
Partiamo dunque dalla seguente identità, che daremo per buona

$$4=\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}}$$

E procediamo come prima indicato, notando che dalla stessa otteniamo

$$5=\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+5\sqrt{10+\ldots}}}}\ ,$$

$$6=\sqrt{8+4\sqrt{9+5\sqrt{10+6\sqrt{11+\ldots}}}}\ ,$$

...

E non è difficile stabilire che la ricorrenza da cui trae origine è

$$g_n=n\sqrt{(n+5)+g_{n+1}}\ ,$$
$$g_n=n\,(n+3)$$

Eppure l'idea può andare ben oltre, notando infatti che se[54]

$$f\,(x)=x+n+a$$

vale l'identità

$$f\,(x)=\left[a\,x+(n+a)^2+x\,f\,(x+n)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Che una volta iterata in termini di radicali ripetuti fornisce l'identità

$$x+n+a=$$

$$=\sqrt{a\,x+(n+a)^2+x\sqrt{a\,(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\sqrt{a\,(x+2\,n)+(n+a)^2+(x+2\,n)\sqrt{\ldots}}}}$$

Da cui saremmo in grado di derivare ulteriori "strane" relazioni tra interi (e non) e radicali ripetuti. Ponendo ad esempio $x=n=a=1$, possiamo anche scrivere

$$3=\sqrt{3+\sqrt{4+2\sqrt{5+3\sqrt{\ldots}}}}$$

Invitiamo infine il lettore a prendere atto della seguente ricorrenza

$$f_m\,(x_1,\ x_2+x_3)=\sqrt{x_2\,x_1+(x_2+x_3)^2+x_1\ f_{m\text{-}1}\,(x_1+x_3,\ x_2+x_3)}\ ,$$
$$f_0\,(a,\ b)=a+b$$

e a trarne qualche conseguenza.

■ 8 La Follia come metodo di indagine

Giunti alla fine di questo percorso possiamo serenamente affermare che in Matematica i pregiudizi non hanno alcuna ragione di esistere!
Abbiamo visto come il pregiudizio che non esistessero le radici quadrate dei numeri negativi è stato abbondantemente superato dall'introduzione di una classe di numeri detti, infelicemente o felicemente, immaginari.

Sappiamo pure che la somma degli angoli interni di un triangolo non è sempre un angolo piatto e che l'idea del parallelismo tra due rette è certamente più complicata di quanto avesse inizialmente ipotizzato Euclide.
Infine il secolo scorso fu scosso dalla prova di Gödel, secondo cui esistono verità che non possono essere dimostrate come tali e che due "verità" conflittuali possono anche sussistere.
Vedremo nel seguito che non bisogna avere pregiudizi nei confronti di serie divergenti e che non bisogna ritenere che $\sum_{n=1}^{\infty} n$ sia un numero infinito.
E' ben noto che per vincere i pregiudizi bisogna allargare il proprio punto di vista, la stessa cosa avviene nell'ambito della matematica. La possibilità di far entrare nel proprio orizzonte e accettare nuovi concetti permette salti concettuali e balzi in avanti che non sarebbero stati possibili se si fossero alzati steccati, come a suo tempo fecero in pitagorici bandendo dal dominio dell'armonia matematica i numeri irrazionali.
Proviamo ora a fare un esempio di come cambiando punto di vista possa emergere un mondo totalmente nuovo.
Noi sappiamo che

$$\int x^n \, d\, x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

La qual cosa implica un problema: nel caso $n = -1$ ci troveremmo di fronte ad una forma indeterminata, che non consentirebbe di definire la funzione associata all'integrale di x^{-1}.
Poiché ci troviamo di fronte ad una divergenza apparente, proviamo a "sottrarre" l'infinito, che deriva dal primo termine, tramite una scelta appropriata della costante arbitraria c. Se, ad esempio, scriviamo

$$c = -\frac{1}{n+1} + d \;\Rightarrow\; \int x^{-1} \, d\, x = \lim_{n\to -1} \frac{1}{n+1} (x^{n+1} - 1) + d$$

otterremmo

$$\lim_{n\to -1} \frac{1}{n+1} (x^{n+1} - 1) = \lim_{n\to -1} \frac{1}{n+1} (e^{(n+1)\ln(x)} - 1) = \ln(x)$$

ovvero

$$\int x^{-1} \, d\, x = \ln(x) + d$$

Come sappiamo dai testi elementari di calcolo.
Cosa abbiamo fatto?
Abbiamo fatto in modo di far emergere la funzione logaritmo eliminando un infinito che ne mascherava l'esistenza, tramite una opportuna tecnica di sottrazione (di infiniti).
La procedura di sottrazione degli infinti, detta rinormalizzazione, è più nota ai fisici che ai matematici e costituisce uno degli elementi di più accesa discussione tra rigoristi e non. Persino da alcuni fisici la sua legittimità viene, da qualche tempo, guardata con sospetto.
Tale criterio di sottrazione ci permette di "dimostrare" che[55]

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... = -\frac{1}{12},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... = \frac{1}{120},$$

o che

$$\infty\,! = \sqrt{2\pi}$$

Relazioni di questo tipo pur nella loro "incredibilità" diventano fondamentali per il calcolo di quantità misurabili in ambito di problemi fisici.
Ramanujan e prima di lui Abel fu uno dei primi a scoprire il mondo delle serie divergenti e a costruirci una teoria su cui non possiamo soffermarci.
Vediamo però quali siano le possibili ricadute, analizzando il cosiddetto effetto Casimir, illustrato nella figura seguente: due superfici conduttrici affacciate l'una all'altra e poste ad una distanza a si attraggono reciprocamente a causa delle fluttuazioni quantistiche.

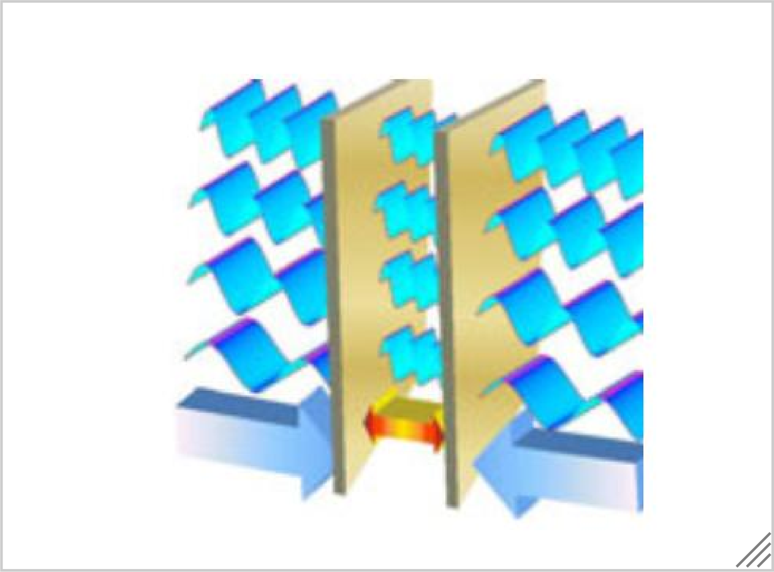


Fig. 50: l'effetto Casimir e l'energia di vuoto.

Da un punto di vista fisico si può dire che la radiazione di vuoto esterna è maggiore di quella interna (che è minore, a causa delle condizioni di confinamento della radiazione stessa) e i piatti vengono spinti l'uno verso l'altro dalla pressione di radiazione. In formule avremo

$$F = -\frac{\partial}{\partial a} \frac{\langle E \rangle}{A}$$

dove $\frac{\langle E \rangle}{A}$ è l'energia confinata nella cavità per unità di superficie. Il relativo calcolo fornisce l'espressione

$$\left| \frac{\langle E \rangle}{A} \right| = \frac{\hbar c \pi}{6 a^3} \sum_{n=0}^{\infty} n^3$$

Persone dotate di solo "esprit de geometrie" concluderebbero che qualcosa non va ma qualcuno dotato di "esprit de finesse" utilizzerebbe la somma di Ramanujan, per concludere che

$$\left| \frac{\langle E \rangle}{A} \right| = \frac{\hbar c \pi}{720 a^3}$$

che è un risultato compatibile con le misure sperimentali

Follia!!!

Forse!!!

Per concludere e per legare quanto appena detto con i discorsi precedenti notiamo che il trucco è quello di sottrarre un infinito e una serie divergente può essere "regolarizzata, addomesticata, rinormalizzata…seguendo una procedura piuttosto semplice.

Per ogni serie divergente $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ si introduce il seguente criterio di sottrazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(t)\, d t = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(0)$$

Dove B_k sono i numeri di Bernoulli e $f^{(m)}(0)$ rappresenta la derivata di ordine m calcolata in 0. Come caso particolare otteniamo facilmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n - \int_0^{\infty} t\, d t = -B_1 f(0) - B_2 \frac{f^{(1)}(0)}{2!} = -\frac{1}{12}$$

Somme finite ed infinite del tipo $\sum_{n=0}^{\square} n^p$ sono legate ai numeri di Bernoulli e alle loro proprietà. Visto che abbiamo già parlato di masse di quark e di leptoni vorremmo ricordare una formula empirica dovuta a Barut[56]

$$M(N) = M_e\left[1 + \frac{2}{3} \alpha^{-1} \sum_{n=0}^{N} n^4\right]$$

Dove M_e è la massa dell'elettrone e α è la costante di struttura fine, di cui diremo nel prossimo paragrafo, per il momento assumeremo che si tratta "solo" di un numero $\alpha = \frac{1}{137}$.

Utilizzando quanto fino ad ora imparato possiamo scrivere

$$M\,(N) = M_e\left[1 + \frac{2}{3}\,\alpha^{-1} \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} B_{\,4-r}\ \frac{(N+1)^{r+1}}{r+1}\right]$$

Nella relazione precedente N rappresenta il numero d'ordine della famiglia, cominciando dunque da quella di ordine $N = 0$ corrispondente a quella dell'elettrone possiamo ricavare le altre (μ, τ..).
E se le famiglie fossero infinite? Noi avremmo la risposta anche in questo caso

$$M\,(\infty) = M_e\left[1 - \frac{2}{3}\,\alpha^{-1}\, B_4\right]$$

…E per quanto riguarda l'ultima follia $\infty\,! = \sqrt{2\pi}$?

….Solo un indizio

$$\infty\,! = \lim_{n\to\infty} 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n = e^{\sum_{n=0}^{\infty}\ln(n)} = \ \ldots$$

9 Dio ci scampi dai Neo Platonici

Nella formula relativa all'energia di Casimir sono state utilizzate due costanti "universali" c, $\hbar$ ovvero la velocità della luce e la costante di Planck ridotta.
Esiste il sogno inconfessato, che attraversa il mondo dei Fisici (e non solo di questi), che sia possibile ridurre le costanti universali a relazioni tra numeri con particolari "proprietà", siano esseri numeri primi oppure particolari numeri irrazionali o, ancora meglio se numeri trascendenti[57]. E' un sogno alchemico[58] periodicamente ricorrente, e non ne furono immuni nemmeno i grandi.
Il valore della costante di struttura fine, ovvero la quantità che regola la "intensità" delle interazioni elettromagnetiche, viene ad esempio riprodotta tramite la formula di Gilson

$$\alpha = \frac{\pi}{\beta}\,\cos(\,\beta\,)\ \text{tanc}\left(\frac{\beta}{29}\right)$$

dove

$$\text{tanc}\ (x) = \frac{\tan(x)}{x},$$
$$\beta = \frac{\pi}{137},$$

Formula alchemica, nel senso di cui sopra, perché basata su 2 numeri primi (137, 29) e un numero trascendente.
Anche se la formula fornisce un valore (137.035999786699…) in accordo fino alla undicesima cifra decimale con il valore sperimentale è difficile ascrivere a questa relazione una qualsivoglia valenza scientifica.
Eppure i neo-plato-pitagorici non hanno remore e sono in grado di trarre profitto da qualsiasi combinazione di numeri. La terna pitagorica viene utilizzata per suggerire esoteriche connessioni con la velocità della luce, infatti

$$\frac{c}{10^8} = 2.99792458\ \cong \sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5}}}$$

e inoltre l'uso di costanti come

$$s = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

che rappresenta la lunghezza del lato di eptagono iscritto in un cerchio di raggio unitario, non sono da meno ed infatti la velocità della luce è data da

$$c \cong \left[\frac{30\,(9\,s+8)}{67\,s+2}\right]^{12} = 2.99792457$$

Inoltre la medesima costante è legata alla costante di gravitazione universale tramite la relazione

$$G \cong \left[7 + \frac{s}{70}\right]^{-12} \cong 6.67426\cdot 10^{-11},$$

$$6.67428\ (67)\cdot 10^{-11} \equiv \text{Valore Sperimentale}$$

e infine alla stessa costante di Planck

$$2\,\pi\,\hbar \cong \left[\frac{s^3}{\left[17+40\,\pi^2\sqrt{70}\right]}\right]^{-12} \cong 6.62606896\ \ 6\cdot 10^{-34}\ ,$$

$$6.62606896\ \ (63)\cdot 10^{-34} \equiv \text{Valore Sperimentale}$$

Nel 1654 Cartesio derivò il seguente teorema: indicando con $\chi_{A,B,C,D} = \frac{1}{r_{A,B,C,D}}$ la curvatura di quattro cerchi posti in una delle configurazioni (dette di Cartesio) riportate nella figura seguente, valgono le seguenti relazioni

$(\chi_A^2 + \chi_B^2 + \chi_C^2 + \chi_D^2) = (\chi_A + \chi_B + \chi_C + \chi_D)^2$

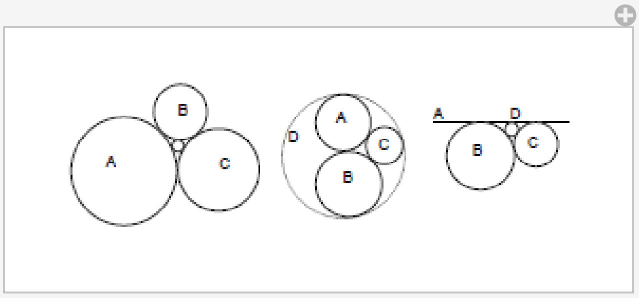


Fig. 51: Teorema di Cartesio.

Il Teorema, rispettabilissimo da un punto di vista matematico, ha purtroppo avuto una traslazione neo-platonica o neo-pitagorica e infatti, con un ardito volo d'ala si è voluto trovare[59] una sua applicazione alle masse delle particelle notando che, se

$\chi_l = \sqrt{m}$

Si ritrova la formula empirica di Koyde per le masse dei leptoni

$(m_e + m_\mu + m_\tau) = \propto (\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2$

Sebbene la relatività generale legittima l'idea di associare alle masse una curvatura, il contesto è scarsamente affidabile se si vuole associare a considerazioni di tale tipo qualcosa di vagamente serio.

Abbiamo voluto concludere questo viaggio nella matematica perché gli autori hanno voluto trasmettere tra le altre cose come possa essere divertente giocare con i numeri e recuperare vecchi metodi computazionali che in qualche modo plasmarono sia la storia della matematica che delle civiltà stesse.

Riteniamo però doveroso insistere su presunte proprietà esoteriche dei numeri possa diventare pericoloso e considerare i numeri come una chiave per decifrare un codice preordinato possa diventare una ingiustificata e pericolosa perdita di tempo.

Possiamo, in piena tranquillità d'animo, asserire che la relazione tra le terne pitagoriche e la velocità della luce non ha più significato fisico di quanto ne abbia la costatazione geometrica riportata nella figura successiva, che mostra come in un triangolo pitagorico "egiziano" il diametro dei cerchi tangenti al cerchio inscritto e alla base siano l'inverso del quadrato del rapporto argenteo e del rapporto aureo[60].

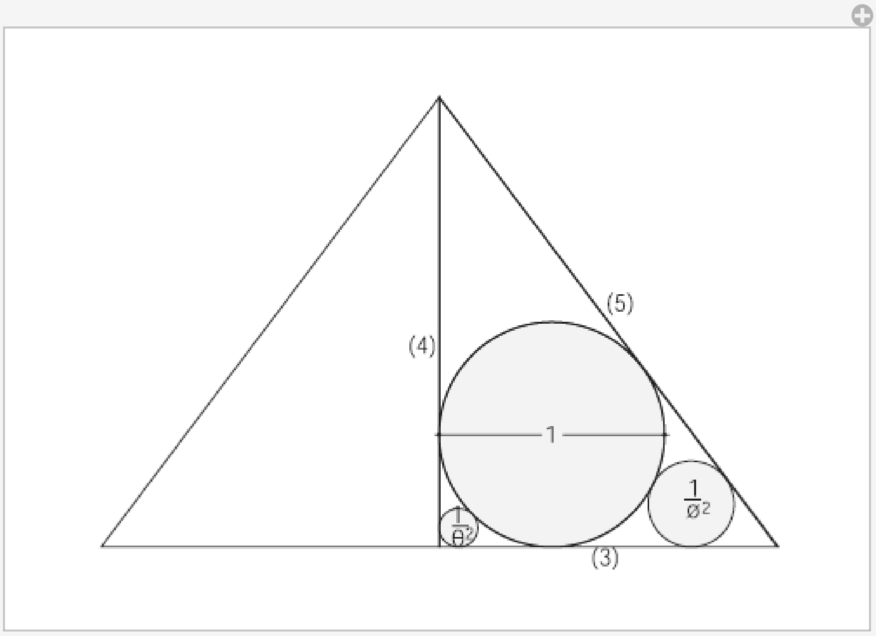


Fig. 52: Triangolo Egiziano e cerchi inscritti.

Al tempo stesso riteniamo che i numeri abbiano un sé un che di “magico” e che tra le creazioni umane siano quelle più sfuggenti. La loro traduzione in termini geometrici ha elementi di fascinazione cui è difficile resistere; l’innocente relazione

$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi^{-n} = 1$

è solo una proprietà delle serie, ma espressa geometricamente diviene quanto riportato nella figura seguente.

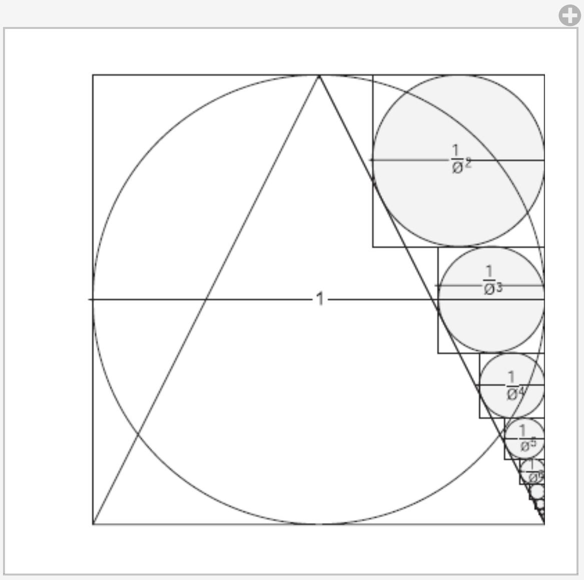


Fig. 53: la somma degli inversi delle potenze della sezione aurea (con l’eccezione di ϕ^{-1}) e relativa interpretazione geometrica

Le figure successive riportano una interpretazione artistica dei numeri di Fibonacci e del teorema di Pitagora. Si tratta di cose belle e divertenti[61], ma ascrivere a queste un qualsivoglia significato nascosto è di sicuro un inutile esercizio.

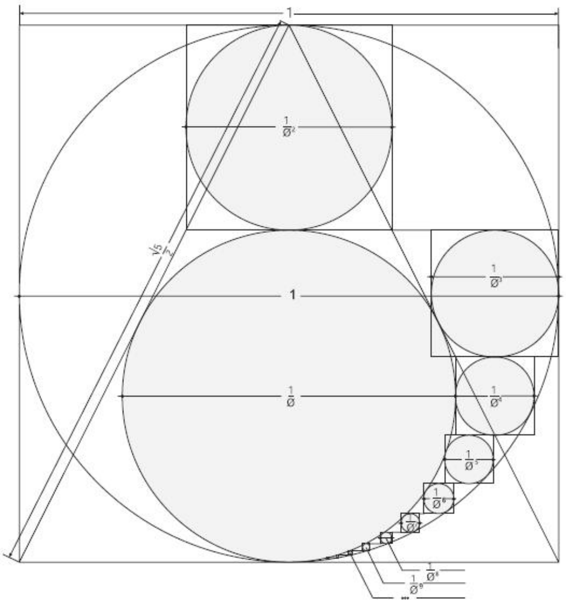


Fig. 54: cerchi tangenti che si “osculano”.

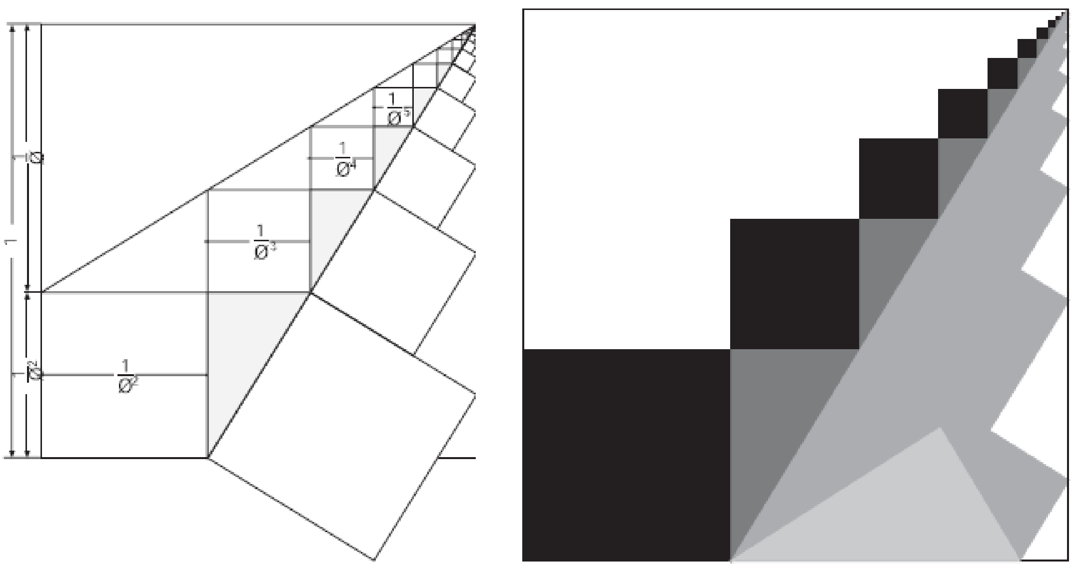


Fig. 55: Teorema di Pitagora e numeri di Fibonacci.

Forse il modo per concludere questo estenuante Tour è una frase di Churchill, il penetrante humour, l’intelligenza profonda e la sapienza del “bon vivre” rendono meglio di ogni altra cosa quello che potremmo aggiungere noi

I had a feeling once about Mathematics - that I saw it all… I saw a quantity passing through infinity and changing its sign from plus to minus. I saw exactly why it happened and why the tergiversation was inevitable, but it was after dinner and I let it go.

Sir Winston Spencer Churchill, 1874 - 1965

Note e appendici

Note

1. A volte detto teorema di Carnot, anche se era già noto ai Greci almeno due mila anni prima di Carnot stesso.
2. Si veda Roberto Renzetti http://www.fisicamente.net/ per una descrizione ed una analisi approfondita.
3. Vedremo nel capitolo V perché le restrizioni imposte siano tali che tale analogia non possa essere considerata del tutto appropriata.
4. Ricordiamo che il termine algoritmo definisce una procedura di calcolo basata su un numero finito di passi.
5. A quanto pare significa “radice quadrata” in sanscrito, ma non garantisco..
6. Quando si parla di somma delle cifre che compongono un numero si procede sommando tutte le cifre e se il numero ottenuto è un numero a più cifre si ripete la procedura.
7. Si veda il paragrafo conclusivo per ulteriori informazioni.
8. Ovvero il valore limite ottenuto dopo un adeguato numero di iterazioni.
9. Unità di misura volumetrica sumerica che equivale a circa 8.3 litri.
10. Il metodo è stato definito, molto efficacemente, “incestuoso” da J. D. Barrow perché accoppia due elementi della stessa famiglia per giungere alla soluzione del problema (si veda J. D. Barrow, *Chaos in Numbeland: the secret life of continued fractions* http://plus.maths.org/content/os/issue11/features/cfractions/index)
11. Vedremo in seguito che tale definizione non è del tutto corretta perché non rappresenta una forma “canonica” che definiremo nel seguito, utilizziamo questo esempio perché rende una idea delle strutture che utilizzeremo nel seguito.
12. Di solito vengono chiamati “radicali annidati” utilizzando una pessima traduzione dell’inglese “nested radicals”.
13. A rigore la forma utilizzata in precedenza è ascrivibile alla famiglia delle frazioni “continue generalizzate”.
14. Ovvero se D è congruente a 1 modulo 4.
15. Anche $\rho = 2 + \phi$ è un irrazionale quadratico ma non ridotto.
16. Tale affermazione è nota come teorema di Galois.
17. Si veda M. S. El Naschie, *A review of E infinity theories and mass spectrum of high energy particle physics*, in Chaos Soliton and Fractals n. 19, 2004, pp. 209-236.
18. I quarks sono i costituenti elementari della materia sono di solito designati con u ,d ,s, c ,b ,t.
19. Si ricorda che una funzione, sviluppabile in serie di potenze intorno ad un punto x_0, può essere scritta nella forma $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ dove $g^{(n)}(x_0)$ rappresenta la derivata di ordine n calcolata nel punto x_0. La serie può rappresentare la funzione stessa se converge per tutti i valori di x, viceversa se la convergenza è limitata ad una regione intorno a x_0 pochi termini della serie possono costituire una approssimazione “locale” della funzione stessa.
20. La prima testimonianza dell’algoritmo risale a un manoscritto anonimo del ‘200 in cui il metodo veniva introdotto con il seguente testo in rime sirventesi (o quasi) “un numero è bello se tanto ti incanta/Se la radice riduci e un conto produci/di un grado abbassato il cubo hai trovato”. La fonte non è particolarmente affidabile.
21. La scelta di Q per designare tali famiglie di numeri perché sono associati alla Quantità incognita x.
22. In termini meno imprecisi dovrei dire che l’unità immaginaria genera un’algebra, mentre i numeri Q non godono di tale proprietà.
23. F. Klein, *Augeswalthe Kapitel der Zalentheorie*, Teubner, 1907, pp. 17-25.
24. M. Livio, *The Golden Ratio: The story of Phi, the World’s Most Astonishing Number*, Broadway Books, 2002.
25. Si veda anche C. E. Falbo, *Generalizations of the Golden Ratio*, http://www.mathfile.net/generalized_phi_mathpage.pdf.
26. Per principio di identità dei polinomi si intende che due polinomi $p_n(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$, $\pi_n(x) = \sum_{s=0}^{n} b_s x^s$ sono uguali se e solo se i coefficienti corrispondenti alla stessa potenza della variabile x sono uguali, ovvero se $a_m = b_m$.
27. G. Markowsky, *Missconceptions about the golden ratio*, The college mathematical journal n. 23, 1992, pp. 2-19.
28. Si veda David Bergamini e gli editori di LIFE, Mathematics, Time incorporated, New York (1963).

29. In termini non del tutto rigorosi definiremo *campo* una struttura algebrica su un certo insieme (non vuoto) in cui sono ammesse due operazioni binarie che diremo *somma* e *prodotto*.

30. Si veda ad esempio Eric W. Weisstein, *Ultraradical*, MathWorld--A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/Ultraradical.html

31. Si veda R. Franci, L. Toti Rigatelli, *Storia delle equazioni algebriche*, Mursia, 1979.

32. Si veda il libro *La Formula Segreta* di F. Toscano, Sironi Editore.

33. Si veda Thomas J. Osler, *Cardan polynomials and the reduction of radicals*, Mathematics Magazine.

34. http://www.matmedia.it/Antologia/I%20grandi%20momenti/Formula%20di%20Ferrari%20per%20le%20quartiche/la_formula_di _ferrari _per _le _qua.htm.

35. E' singolare notare che nell'Ars Magna, Cardano fa riferimento al metodo di Ferrari, notando che la formula risolutiva delle equazioni di quarto grado era dovuta a Ludovico Ferrari (un suo giovane collaboratore all'epoca diciassettenne), che, con parole sue, "l'ha scoperta dietro mia richiesta". Quanta pelosa liberalità!!!

36. La storia è piuttosto lunga e complicata e non possiamo raccontarla in breve senza far torto a nessuno. Per l'utilizzo di metodi che coinvolgano tecniche di sviluppi in serie di funzioni inverse citiamo solo l'italiano Giuseppe Belardinelli che verso la metà dello scorso secolo sviluppò metodi estremamente generali ripresi più recentemente da M. L. Glasser.

37. In realtà erano 11 ma l'ultima era "sbagliata!!!"; di solito si glissa su questo errore ma ci si permetta questa meschina sottolineatura perché l'invidia che abbiamo provato è stata grande.

38. R. W. D. Nickalls, The Mathematical Gazette n. 77, 1993, pp. 354-359.

39. In termini meno vaghi il (secondo) teorema di incompletezza di Gödel va formulato come segue:
Sia *S* un sistema formale che
a) contiene il linguaggio dell'aritmetica
b) include gli assiomi di Peano
c) è consistente
allora la consistenza di *S* non può essere provata in *S*.

40. Il problema è ampiamente dibattuto; ad esempio Freeman Dyson (New York Review of Books, May 13, 2004) si espresse come segue:
"*Gödel's theorem implies that pure mathematics is inexhaustible. No matter how many problems we solve, there will always be other problems that cannot be solved within the existing rules. … because of Gödel's theorem, physics is inexhaustible too. The laws of physics are a finite set of rules, and include the rules for doing mathematics, so that Gödel's theorem applies to them*."

41. Si veda P. Cartier, *Mathemagics*, Seminaire Lothangerien de Combinatoire n. 44, 2000, Article B44d.

42. Augustus De Morgan (1806-1871), matematico e banchiere fondatore della banca Morgan.

43. Gli agiografi del grande matematico raccontano che Gauss scoprì la formula alle elementari, risolvendo all'istante un compito dato dal maestro, che probabilmente voleva tenere impegnati i suoi allievi a lungo assegnando loro il compito noioso di sommare i primi numeri da 1 a 50.

44. Avendo parlato di matematica indiana non vorremmo farci irretire in una querelle antica: l'equazione fu erroneamente attribuita a Pell (addirittura da Eulero) in realtà dovrebbe essere detta "equazione di Brahmagupta-Bhaskara" che la studiarono sin dal secolo VII.

45. Si veda ad esempio V. Singh, *L'ultimo Teorema di Fermat.*

46. Archimede ottenne tale risultato nel calcolo delle aree con il metodo di esaustione.

47. Fu proprio Jakob Bernoulli a riferirsi a Faulhaber come all'ultimo dei "Rechenmeister" (aritmetici, abbachisti…), nel suo libro *Ars coniectandi* in cui introdusse i numeri che portano il suo nome.

48. Si ricorda che la regola dell'Hopitàl stabilisce che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se entrambe le funzioni $f(x)$, $g(x)$ sono tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. La procedura può essere ripetuta se le derivate prime soddisfano la medesima condizione.

49. Il prodotto di due serie $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, $B(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p$ viene trattato tramite il cosiddetto prodotto di Cauchy, ovvero $A(x) B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $c_n = \sum_{r=0}^{n} a_{n-r} b_r$. Si ricorda inoltre che con $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ è il coefficiente binomiale.

50. Le prime ricerche in questo ambito risalgono a J. John Blissard, *Theory of generic equations*, in The quarterly journal of pure and applied mathematics n. 4, 1861, pp. 279-305. Per una moderna esposizione si veda S. Roman, *The umbral calculus*, Pure and Applied Mathematics n. 111, 1984, Academic Press Inc. (Harcourt Brace Jovanovich Publishers), London.

51. Ovviamente nell'immediato, salvo trovare una risposta più che adeguata dopo un quarto d'ora.

52. Si veda anche C. D. Olds, *Frazioni Continue*, 1963, Zanichelli.

53. Si veda il già citato C. D. Olds *Frazioni Continue*; il problema in origine riguardava marinai scimmie e noci di cocco, ci siamo permessi una variante ma moderna, ma, mutatis mutandis, il problema è adattabile a qualsivoglia situazione.

54. Bruce C. Berndt, *Ramanujan's Notebook*, 1989, Part II, p. 108, Springer Verlag.

55. Per essere più precisi dovremmo scrivere $\sum_{n=0}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... = \left(-\frac{1}{12}\right)_R$ dove R ricorda che è stata adottata una procedura di sottrazione.

56. A. O. Barut, *Lepton mass formula*, Phys. Rev. Lett. n. 42, 1979, p. 1251.

57. A.I. Miller, *Deciphering the Cosmic Number*, titolo italiano "L'Equazione dell'Anima", 2009, Rizzoli.

58. G. Dattoli, *The fine structure constant and the numerical alchemy*, arXiv:1009.1711 [physics.gen-ph], http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1009/1009.1711.pdf.

59. J. Kocik, *The Koide mass formula and geometry of circles*, arXiv:1201.2067 [physics.gen-ph], http://arxiv.org/pdf/1201.2067.pdf.

60. Janusz Kapusta, *The Square, the Circle and the Golden Proportion: A New Class of Geometrical Construction*, Forma n. 19, 2004, pp. 293-313.

61. Si veda il già citato saggio di Janusz Kapusta.

Edito dall' ENEA
Servizio Comunicazione

Lungotevere Thaon di Revel, 76 - 00196 Roma

www.enea.it

Stampa: Tecnografico ENEA - CR Frascati
Pervenuto il 4.3.2015
Finito di stampare nel mese di marzo 2015