

CALCOLO ANALITICO DEL PUNTO DI OSSERVAZIONE NELLE ANAMORFOSI PROSPETTICHE

Dimostrazione dell'assioma di Nicéron

PAOLO DI LAZZARO, DANIELE MURRA

ENEA – Dipartimento Fisica della Fusione
Centro Ricerche Frascati, Roma

PIETRO VITELLI

Via C. da Caiazzano 42, 82033 Cusano Mutri (Benevento)



AGENZIA NAZIONALE PER LE NUOVE TECNOLOGIE,
L'ENERGIA E LO SVILUPPO ECONOMICO SOSTENIBILE

CALCOLO ANALITICO DEL PUNTO DI OSSERVAZIONE NELLE ANAMORFOSI PROSPETTICHE

Dimostrazione dell'assioma di Nicéron

PAOLO DI LAZZARO, DANIELE MURRA

ENEA – Dipartimento Fisica della Fusione
Centro Ricerche Frascati, Roma

PIETRO VITELLI

Via C. da Caiazzano 42, 82033 Cusano Mutri (Benevento)

I Rapporti tecnici sono scaricabili in formato pdf dal sito web ENEA alla pagina
<http://www.enea.it/it/produzione-scientifica/rapporti-tecnici>

I contenuti tecnico-scientifici dei rapporti tecnici dell'ENEA rispecchiano l'opinione degli autori e non necessariamente quella dell'Agenzia.

The technical and scientific contents of these reports express the opinion of the authors but not necessarily the opinion of ENEA.

CALCOLO ANALITICO DEL PUNTO DI OSSERVAZIONE NELLE ANAMORFOSI PROSPETTICHE

Dimostrazione dell'assioma di Nicéron

PAOLO DI LAZZARO, DANIELE MURRA, PIETRO VITELLI

Riassunto

Presentiamo il calcolo analitico esatto che porta alla dimostrazione rigorosa dell'assioma di Nicéron sulla posizione del punto di osservazione per la ricostruzione di disegni deformati tramite anamorfosi prospettiche. Mostriamo inoltre i risultati di una forma originale di arte anamorfica moderna realizzata senza pitture e discutiamo l'applicazione pratica delle anamorfosi in ambito artistico, crittografico, antiterrorismo, pubblicitario e nello studio e comprensione del condizionamento delle forme ambientali sulla nostra percezione visiva.

Parole chiave: Anamorfosi, Prospettiva, Nicéron, Percezione

EXACT CALCULATION OF THE OBSERVATION POINT IN PERSPECTIVE ANAMORPHOSES

Demonstration of the Nicéron's axiom

Abstract

We present the exact calculations leading to the rigorous proof of the axiom of Nicéron on the position of the observation point of perspective anamorphoses. We show an original street-art anamorphosis made without paintings and discuss the relevance of anamorphoses in the fields of arts, encryption, anti-terrorism, advertising and to the study of ambient shapes that influence our visual perception.

Keywords: *Anamorphosis, Perspective, Nicéron, Perception*

INDICE

1. Introduzione	7
2. Anamorfosi e punto prospettico, introduzione al problema	8
3. Calcolo analitico esatto del punto prospettico	12
4. A cosa servono le anamorfosi?	13
5. Anamorfosi tridimensionali e percezione	17
6. Riassunto e conclusioni	18
Referenze	20

CALCOLO ANALITICO DEL PUNTO DI OSSERVAZIONE NELLE ANAMORFOSI PROSPETTICHE: DIMOSTRAZIONE DELL'ASSIOMA DI NICÉRON

1. Introduzione

Tra il XIV ed il XVI secolo il mondo dell'arte vede la nascita della prospettiva, una tecnica basata su calcoli matematici e geometrici avente come fine la riproduzione, su una tela, di un disegno che rappresenti fedelmente uno scenario tridimensionale. Gli autori di questa tecnica rivoluzionaria sono quasi tutti italiani, a partire da Ambrogio Lorenzetti e Filippo Brunelleschi, passando per Leon Battista Alberti, Piero Della Francesca e Leonardo da Vinci, oltre al tedesco Albrecht Dürer.

Le regole prospettiche richiedono la determinazione di un "punto di fuga", ovvero un punto verso il quale concorrono le linee, parallele nella realtà ma convergenti nel disegno. Secondo queste regole, il punto di fuga è posto sullo stesso piano del disegno, di solito è interno alla scena rappresentata, e l'osservatore, collocato in posizione frontale rispetto al quadro, ha una visione coerente con l'osservazione tridimensionale della realtà.

Contemporaneamente a questi nuovi principi, nel Codice Atlantico di Leonardo da Vinci (circa 1515) troviamo il disegno del volto distorto di un bambino: si tratta di una rappresentazione che non segue i dettami prospettici, e che più tardi sarebbe stata chiamata "anamorfica" (dal greco αναμορφωσις, un neologismo del XVII secolo che significa "dare nuova forma ad una figura", o anche "dare forma in modo contrario"). L'osservatore in posizione frontale al disegno anamorfico percepisce una figura deforme, a volte irriconoscibile. Per osservare il disegno nelle corrette proporzioni, l'osservatore deve porsi vicino al punto di fuga, che, nel caso dell'anamorfosi, è rialzato dal piano del disegno in un luogo posto di scorcio. Quindi l'osservatore deve collocarsi lateralmente rispetto al disegno, vicino alla superficie figurata o a un suo prolungamento. Leonardo illustra una tecnica per realizzare un'anamorfosi che si verrà ripresa in diversi trattati successivi, ovvero l'uso di un foro attraverso cui passa una luce che proietta su una parete l'ombra di ciò che si vuol raffigurare [1]. Leonardo definisce questo modo di disegnare "prospettiva accidentale", in contrapposizione alla "prospettiva naturale", in quanto oggetti lontani dovevano essere disegnati più grandi di quelli vicini, al contrario di quello che si osserva nella realtà.

Nei prossimi paragrafi vedremo che l'anamorfosi trova importanti applicazioni non solo in ambito artistico, ma anche in crittografia, nelle tecniche antiterrorismo, nella pubblicità e nello studio del condizionamento delle forme ambientali sulla nostra percezione visiva. Un'introduzione all'anamorfosi e alla sua evoluzione dalle origini ai giorni nostri si può trovare negli articoli [2, 3].

2. Anamorfosi e punto prospettico, introduzione al problema

Il primo tentativo di formalizzare la tecnica per disegnare un'anamorfose si trova in un trattato di Salomon de Caus pubblicato nel 1612 [4], ma la prima descrizione completa delle regole geometriche per progettare e realizzare anamorfose, sia prospettiche, sia catottriche (cioè tramite riflessione da specchi curvi) si trova nell'opera del frate minore Jean François Nicéron pubblicata nel 1638 [5]. E' interessante leggere il titolo completo dell'opera di Nicéron, che spiega da solo cosa sia l'anamorfismo: *"Prospettiva curiosa o magia artificiale degli effetti meravigliosi dell'ottica, della catottrica e della diottrica. Nella quale, oltre a un compendio dei metodi generali della prospettiva comune, esemplificata sui cinque solidi regolari, si insegna come costruire ogni specie di figure deformi, che, viste da un punto adatto, appaiano ben proporzionate. Tutto questo con procedimenti così semplici che anche i meno esperti in Geometria potranno servirsene aiutandosi solo con riga e compasso. Opera utilissima a Pittori, Architetti, Incisori, Scultori, e a tutti quelli che si servono di disegni nel loro lavoro"*.

Nicéron fornisce istruzioni dettagliate per realizzare un disegno anamorfico. La figura 1 in alto mostra il disegno del volto di un uomo barbuto dentro una cornice quadrata suddivisa in un reticolo di $6 \times 6 = 36$ caselle. Tracciamo un triangolo isoscele Pad in cui la base ad è identica al lato AD del quadrato che contiene il volto e dividiamo il lato ad del triangolo in 6 segmenti uguali, esattamente come il lato AD del quadrato. Da ciascuno dei punti e, f, g, h, i che delimitano tali segmenti tracciamo una linea che congiunge i punti con il vertice P del triangolo, come mostrato nella figura 1 in basso.

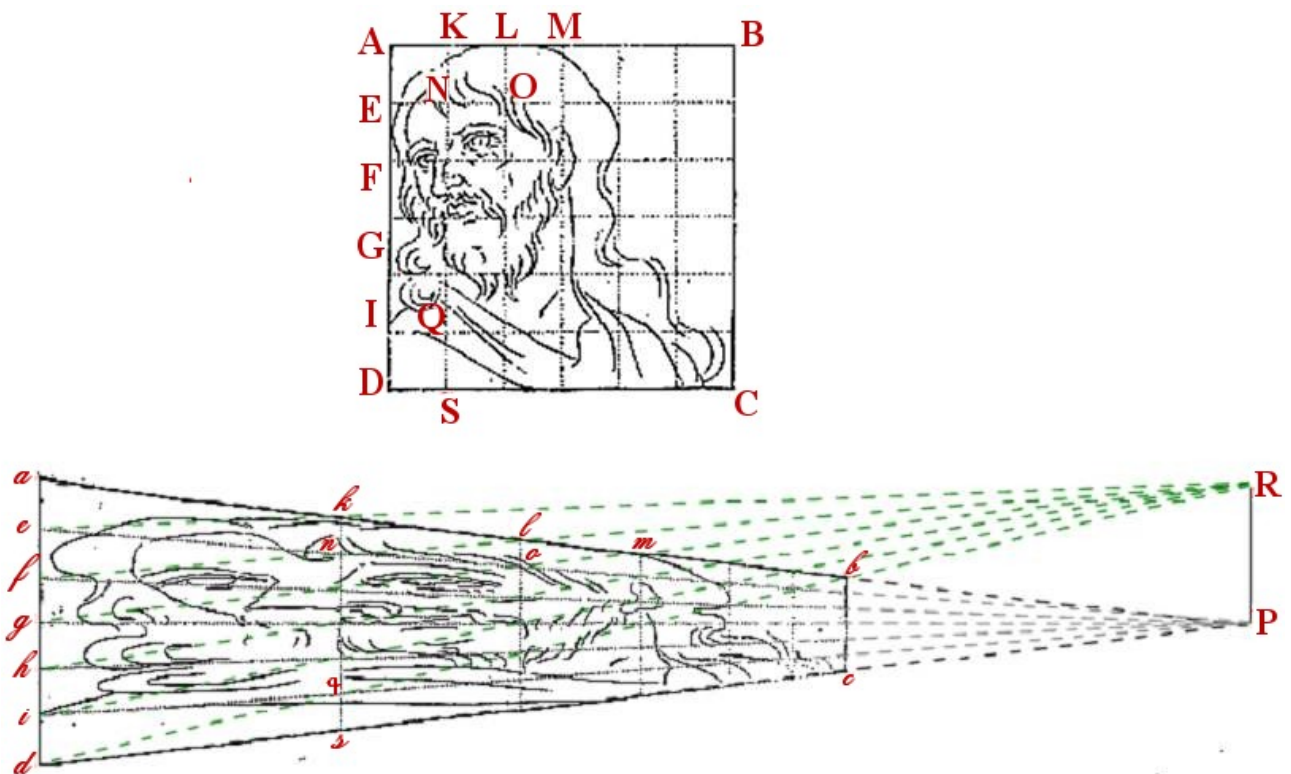


Figura 1. Ricostruzione delle Tavole 36 e 37 usate da Nicéron in [5] per illustrare la procedura di costruzione di anamorfose prospettiche. Elaborazione ENEA.

Ora, tracciamo un segmento PR perpendicolare all'altezza del triangolo, e da R tiriamo una linea verso il punto d . L'intersezione del segmento Rd con il triangolo fornisce il punto b che corrisponderà al punto B del disegno nel riquadro. Tracciando da b una linea parallela a PR , l'intersezione con l'altro lato congruente del triangolo fornisce il punto c corrispondente al punto C del disegno del volto, e quindi il segmento bc corrisponde al lato BC dello stesso disegno. Analogamente, le intersezioni dei segmenti Re, Rf, Rg, Rh, Ri con il triangolo forniscono i punti da cui poter tracciare segmenti verticali che corrispondono ai segmenti del

reticolo in cui è suddiviso il quadrato $ABCD$, per cui, ad esempio, il segmento ks corrisponde al segmento KS .

Ricapitolando, dal triangolo iniziale Pad abbiamo ottenuto il trapezio $abcd$ che poi abbiamo suddiviso in 36 trapezi, ciascuno dei quali corrisponde ad un quadrato del reticolo della figura del volto. Ora, disegnando il tratto di disegno all'interno di ciascun trapezio in modo che inizi e finisca negli stessi punti del corrispondente quadrato del reticolo originale, otteniamo il disegno in basso nella figura 1. Essendo cambiate le dimensioni e la forma delle caselle del reticolo, l'immagine ottenuta è deformata in modo anamorfico rispetto al volto originale disegnato nel quadrato.

La costruzione anamorfica di Nicéron è puramente geometrica. Nell'articolo [3] sono riportate le equazioni analitiche che consentono di "mappare" ciascun punto di coordinate (ξ, η) del disegno originale nel punto di coordinate (x, y) che giace sul piano anamorfico, e ottenere l'equazione che determina l'effetto deformante dell'anamorfo in funzione della posizione del punto di osservazione rispetto al disegno anamorfico. In riferimento alla figura 2 (dove l'origine delle coordinate sia del disegno sia dell'anamorfo è nel punto 'O'), le coordinate della deformazione anamorfica sono date dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{h\xi}{(h-\xi) \cdot \tan(\alpha)} \\ y = \eta \cdot \sqrt{\frac{(d+x)^2 + h^2}{(h-\xi)^2 + d^2}} \end{cases} \quad (1)$$

dove h è la distanza dalla parete del punto di osservazione N , α è l'angolo di elevazione del punto di osservazione (cioè, l'angolo tra la parete e la linea orizzontale che unisce il punto di osservazione con l'asse verticale V), d è la distanza tra il disegno originale e la proiezione di N sulla parete, η ed ξ sono le coordinate rispettivamente orizzontale e verticale del punto sul disegno originale. Ovviamente, $h > \xi$ e $\alpha > 0$.

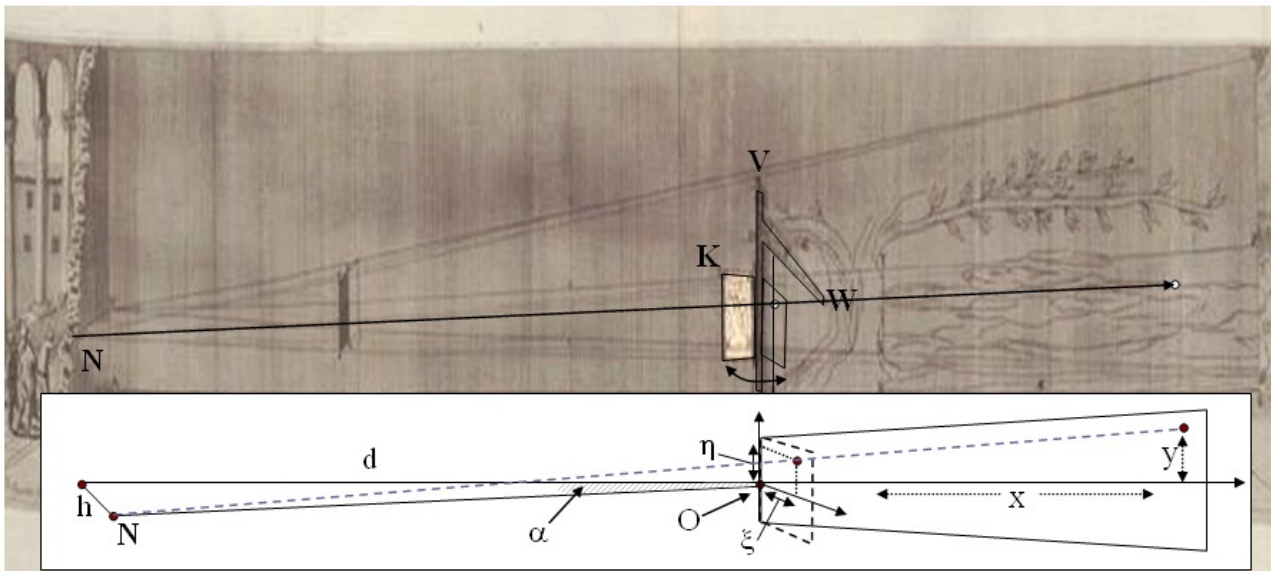


Figura 2. Schema per illustrare la procedura di costruzione e pittura dell'anamorfo di S. Francesco di Paola nel convento della chiesa di Trinità dei Monti, Roma realizzata da Emmanuel Maignan [2]. L'inserto in basso mostra il sistema di riferimento che abbiamo usato per dedurre le equazioni (1) che mappano analiticamente ciascun punto anamorfico al corrispondente punto del disegno originale. Tratto da [3].

La deformazione anamorfica è proporzionale al rapporto $\Delta = x/\xi$, cioè:

$$\Delta = \frac{h}{(h-\xi)\tan(\alpha)} = \frac{d}{h-\xi} \quad (2)$$

Di seguito, Nicéron presenta un altro disegno, utile per tracciare la forma $OQRN$ che rappresenta il quadrilatero $XQOE$ posto sul piano orizzontale. Questo disegno lo si può ricavare da quello precedente ruotando il punto di osservazione G intorno all'asse verticale OP e il quadrilatero $XQOE$ intorno all'asse orizzontale ML , come schematizzato nella figura 3b. Questo stratagemma consente di realizzare il disegno in prospettiva direttamente su un foglio, una tecnica da cui derivano le “moderne” proiezioni ortogonali e che era stata già introdotta Leon Battista Alberti [16], Piero Della Francesca [17] e soprattutto dal Vignola [7] e dal francese Du Cerceau [18]. Nella figura 3b abbiamo esteso l'originale quadrilatero $XQOE$ fino a rappresentare un pavimento quadrato a scacchiera, e ne abbiamo riportato la sua proiezione sul piano scenografico (la ragione sarà chiarita nel seguito).

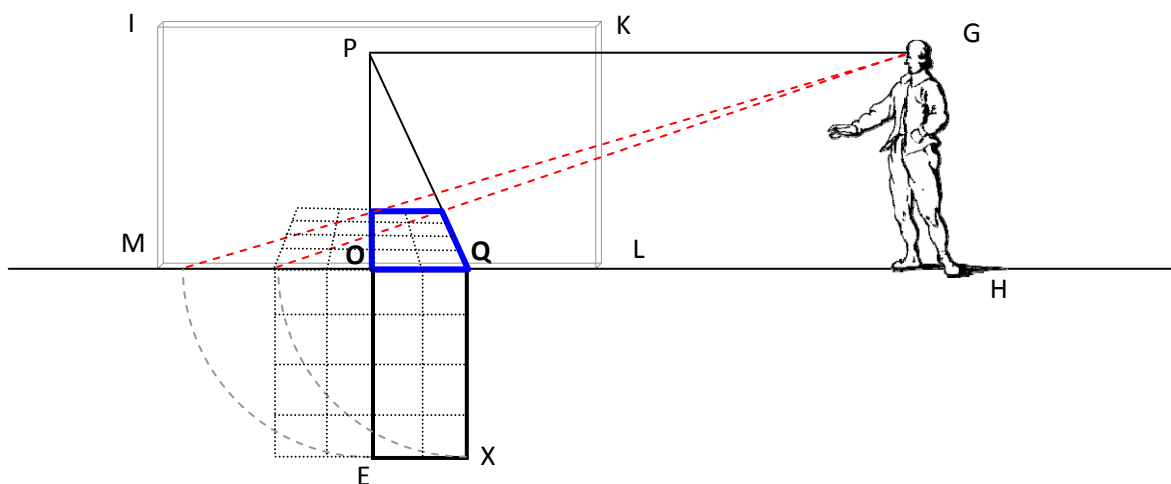


Figura 3b. La stessa costruzione prospettica della figura 3a, in cui l'osservatore è riportato sullo stesso piano del disegno, tramite una rotazione intorno all'asse verticale OP passante per il centro del piano alzato, e il quadrilatero $XQOE$ è ruotato intorno all'asse orizzontale ML . Tratto da [5] e rielaborato dagli Autori.

La dimostrazione termina qui. Nicéron afferma che il “fondamento” della costruzione anamorfica della figura 1 si trova nelle dimostrazioni che accompagnano le figure 3a e 3b, ma in realtà non c'è una connessione diretta tra le figure 1 e 3. Occorre quindi sviluppare un ragionamento supplementare.

Nella figura 3b abbiamo disegnato un pavimento quadrettato (Nicéron lo aggiunge in una figura successiva alle due precedenti) il quale, una volta proiettato sul piano scenografico diventa un trapezio suddiviso in tanti piccoli trapezi. La correlazione ricercata tra anamorfose e prospettiva centrale è dunque in questa rappresentazione, che è legata alla figura 1 dove esiste un punto P di fuga ed un punto R di vista, da cui si tracciano le linee fino alla base maggiore del trapezio e si ottengono, tramite intersezioni, i vari trapezi interni. Nella figura 3b accade una cosa simile, ovvero tracciando da G le linee che arrivano sulla base del piano scenografico si ottengono, tramite intersezioni, dei trapezi analoghi a quelli della figura 1. Mentre nella figura 3b la distanza PG è quella tra osservatore e piano del disegno e GH l'altezza dell'osservatore dal pavimento, nella figura 1 queste due distanze sono invertite, poiché la posizione dell'osservatore è sopra il punto di fuga P ad un'altezza pari al segmento PR , secondo Nicéron. In pratica, Nicéron ha ragione, ma non fornisce alcuna dimostrazione di questo assunto, forse perché ragiona come per la prospettiva diretta, supponendo di “ruotare” il segmento PR della figura 1 di 90° ed osservando che la linea di congiunzione tra R ed il centro della base maggiore del trapezio anamorfico passa per il punto centrale del lato superiore del disegno “rialzato”, posto, cioè, nel piano scenografico, perpendicolare al foglio.

In ogni caso, né Nicéron, né gli studiosi che hanno affrontato il problema della costruzione dell'anamorfose prospettica [4, 6–15] hanno fornito una dimostrazione matematica che giustifichi l'affermazione secondo la quale il corretto punto di osservazione dell'anamorfose prospettica si trova sopra il punto P ad una distanza dalla parete del disegno uguale al segmento PR . Di conseguenza, l'affermazione di Nicéron assume il ruolo di “assioma”.

3. Calcolo analitico esatto del punto prospettico

Partendo dalla deformazione anamorfica di una forma disegnata in un quadrato, proviamo dunque a dimostrare in modo rigoroso l'assioma di Nicéron.

La figura 4 rappresenta la costruzione tridimensionale del disegno anamorfo del volto di Nicéron, con il quadrato $ABCD$ in rilievo rispetto al trapezio $DGLC$ che è la deformazione anamorfica di $ABCD$.

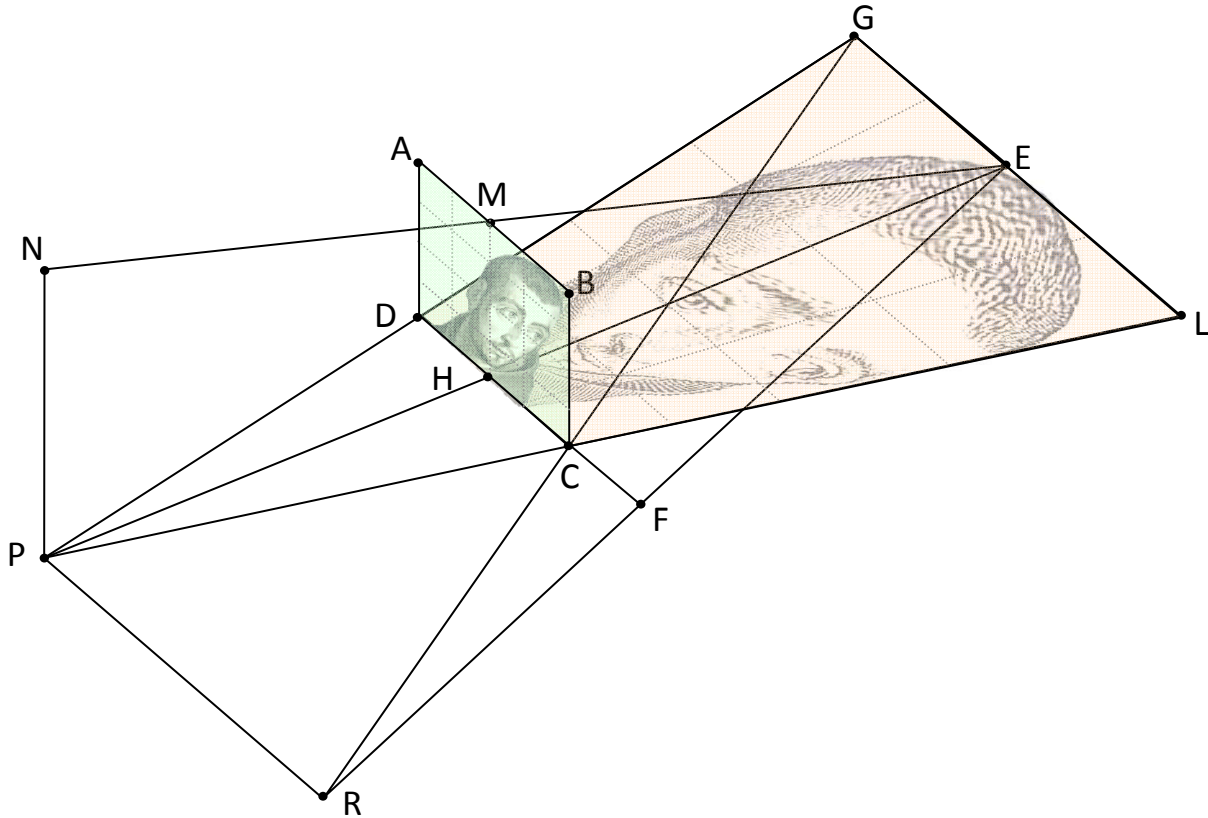


Figura 4. Costruzione tridimensionale dell'anamorfosi prospettica del ritratto di Nicéron. Il disegno deformato in modo anamorfico nel trapezio $DGLC$ su una superficie orizzontale, se osservato dal punto N appare nelle proporzioni corrette, come se fosse disegnato su un'ipotetica tela perpendicolare alla superficie, nella posizione del quadrato $ABCD$. Elaborazione ENEA.

Ci proponiamo di dimostrare che la distanza PR , usata per costruire l'anamorfosi della figura 4 con la stessa procedura usata per la figura 1, è uguale al segmento PN , dove N è il punto di osservazione dal quale il disegno anamorfico in $DGLC$ appare nelle corrette proporzioni, identico al disegno originale in $ABCD$. Come osservato in [1, 5] guardando il disegno anamorfico dal punto di osservazione corretto, lo stesso disegno appare come "rialzato" dal foglio, nella posizione del quadrato $ABCD$. Leonardo scrive "non ti potrà mai persuadere che detta figura non sia dispiccata dal muro" [1]. Ovviamente, la tridimensionalità del disegno è un'illusione generata dal nostro sistema psico-percettivo, che in base al *deja-vu*, alla nostra esperienza pregressa, trova logico e coerente collocare perpendicolare al piano la vista prospettica di un disegno deformato che in realtà giace sul piano stesso, perché proprio sul piano perpendicolare $ABCD$ la figura appare nelle proporzioni corrette e usuali.

Per come è costruita l'anamorfosi nella figura 4 abbiamo le seguenti condizioni iniziali:

$$PD = PC; \quad PG = PL; \quad DH = HC; \quad PH \perp DC; \quad PE \perp GL; \quad PR \parallel DF \parallel GL.$$

Si considerino i triangoli EFH ed ERP . Essi sono simili in quanto rettangoli, con le basi PR e HF parallele e con l'angolo in E in comune. Vale, dunque, la seguente proporzione:

$$PR / HF = RE / FE,$$

da cui

$$PR = HF \times RE / FE . \quad (3)$$

Si considerino ora i triangoli GCD e GRP . Anch'essi sono triangoli simili poiché hanno i tre angoli congruenti: l'angolo in G è comune e poiché i lati CD e PR sono paralleli e gli angoli corrispondenti sono uguali, possiamo scrivere:

$$PR / DC = RG / CG ,$$

da cui

$$PR = DC \times RG / CG . \quad (4)$$

Uguagliando le equazioni (3) e (4) abbiamo:

$$HF \times RE / FE = DC \times RG / CG . \quad (5)$$

Per il teorema di Talete [19], essendo PR , DF e GL appartenenti a rette parallele, i segmenti compresi tra queste rette sono tra loro in proporzione, quindi:

$$RE / RG = FE / CG ,$$

ovvero,

$$RE / FE = RG / CG .$$

Applicando quest'ultima relazione all'equazione (5) otteniamo $HF = DC$. Notiamo che questa equivalenza vale in generale per tutte le coppie di segmenti ottenuti dall'intersezione di una retta, parallela a PR e GL , con i triangoli GPR ed EPR .

Il lato DC è identico all'altezza HM in quanto $ABCD$ è un quadrato, pertanto $HF = HM$. Di conseguenza, i triangoli FHE e HME sono congruenti (poiché rettangoli e con i due cateti uguali) e, per similitudine, sono congruenti anche i triangoli rettangoli PRE e PNE , da cui si deduce che $PR = PN$, come volevasi dimostrare.

4. A cosa servono le anamorfosi?

Perché si realizzano le anamorfosi? A cosa servono?

I frati minimi Nicéron [5] e Maignan [10] cercavano nell'anamorfosi un'analogia con l'ordine spirituale della creazione divina, che non è evidente ai più. Così come nei disegni anamorfici l'occhio distratto vede solo un insieme confuso di forme, che si ricompongono e si rivelano solo se si osserva lo stesso disegno dal punto di vista prospettico, così l'ordine nascosto della creazione divina rivelava la sua armonia se osservato dal punto privilegiato della fede. Secondo De Rosa [20] "*Nicéron fu affascinato per tutta la sua esistenza dall'idea che nella natura si nascondesse un codice segreto divino di cui la matematica, e in primis l'ottica, potevano farsi interpreti, elaborando un lessico espressivo che attraverso la magia artificiale ne riproducesse la segreta natura configurativa, le leggi formanti del suo farsi e del suo divenire.*"

Gli artisti del Rinascimento e del Barocco che hanno utilizzato gli insegnamenti geometrici di Nicéron erano meno interessati agli aspetti religiosi e più attratti dal gusto dell'illusione, della prospettiva bizzarra, della ricerca della sorpresa per generare lo stupore e la meraviglia dell'osservatore e dei committenti delle opere anamorfiche. Gli esempi di anamorfosi su grande scala, sia figurative che architettoniche (queste ultimi realizzati non semplicemente su una superficie, bensì in uno spazio tridimensionale), sono in gran parte concentrati tra il XV e il XVII secolo: ricordiamo l'abside della chiesa di S. Maria presso San Satiro a Milano di Donato Bramante [21], le scene prospettiche del Teatro Olimpico palladiano a Vicenza di Vincenzo Scamozzi [22], il soffitto e la falsa cupola della chiesa di S. Ignazio a Roma progettati e affrescati da Andrea Pozzo [23], il corridoio di Palazzo Spada a Roma di Francesco Borromini [24].

Nondimeno, Pietro Accolti (1579-1642), architetto e matematico al servizio di Carlo de' Medici a Firenze, nel libro [25] rivela che nel XVII secolo disegni anamorfici erano usati per nascondere una mappa o un messaggio segreto. Solo chi conosceva la posizione del punto prospettico e possedeva lo specchio curvo con le giuste dimensioni poteva “leggere” il reale contenuto di un disegno apparentemente confuso e insignificante. Di fatto, l’anamorfosi è una valida tecnica crittografica, particolarmente efficace e difficile da decrittare quando associata alla riflessione di specchi conici, come mostrato negli articoli [26, 27].

La matematica dei disegni anamorfici risulta utile anche nella progettazione di sistemi di irraggiamento e/o di ripresa da un punto prospettico defilato rispetto alla scena da osservare. Ad esempio, nell’ambito del Progetto Europeo FORLAB (*Forensic Laboratory for in-situ evidence analysis in a post blast scenario*) [28] abbiamo usato procedimenti anamorfici per progettare i sistemi ottici di irraggiamento e di ricezione applicati alla tecnica LIF (*Light Induced Fluorescence*) per il riconoscimento spettroscopico di materiale pericoloso in uno scenario post attentato su un’area di 144 metri quadri [29]. In una tale configurazione, infatti, il fotogramma inquadrato dal sistema ottico di irraggiamento laser e dalla CCD di ricezione appare deformato in modo anamorfico a causa del particolare punto prospettico in cui si trova il sistema stesso, come illustrato nella figura 5.

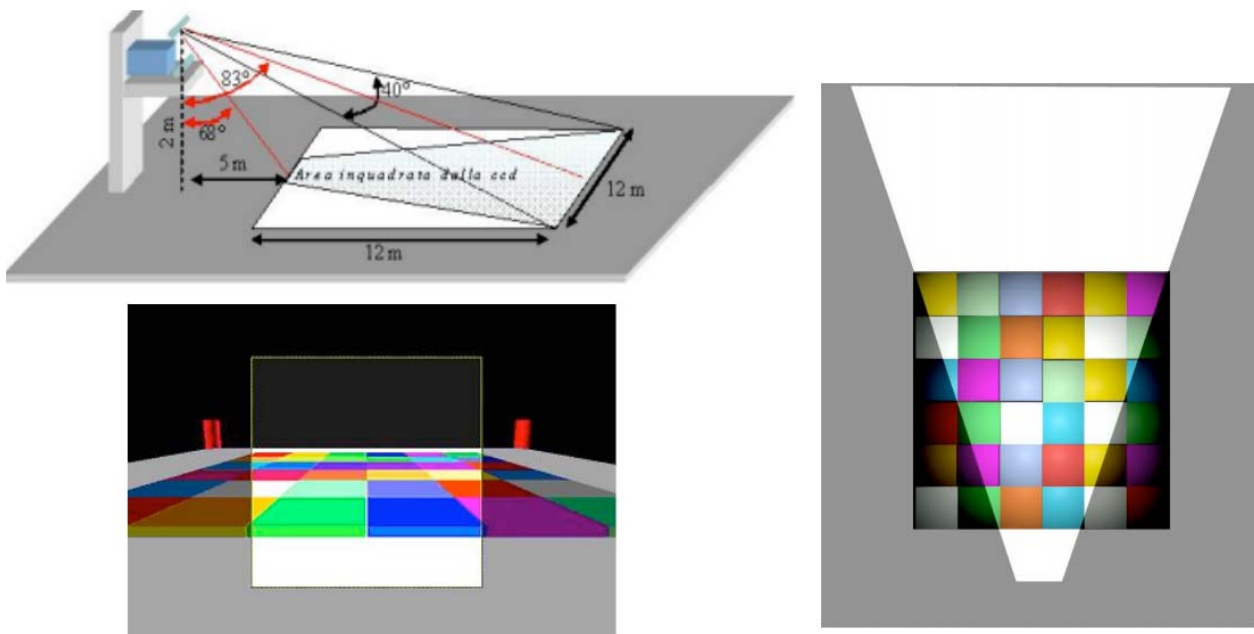


Figura 5. In alto a sinistra: schema di irraggiamento laser e del sistema di ricezione ottico, posti a 2 metri di altezza. In basso a sinistra: fotogramma inquadrato dalla telecamera. In basso a destra: visione dall’alto della proiezione dello stesso fotogramma sul terreno da cui arrivano i segnali LIF. Elaborazione ENEA [29].

Al giorno d’oggi l’applicazione più diffusa delle tecniche anamorfiche è nella cartellonistica pubblicitaria sui campi di calcio e nella Formula 1. Si tratta di insegne disegnate sul suolo in modo distorto che, inquadrata dalla telecamera che riprende l’evento (“viste da un solo forame” [1, 8]), appaiono in televisione come cartelloni tridimensionali, rialzati rispetto al terreno e ben proporzionati, sfruttando la percezione tridimensionale del disegno anamorfico descritta nel §3, figura 4. Recentemente, una marca di automobili ha realizzato un filmato pubblicitario [30] in cui un’automobile passa attraverso anamorfosi prospettiche di grandi dimensioni, e la percezione tridimensionale delle stesse anamorfosi crea effetti illusori sorprendenti, di notevole suggestione.

Gli esempi più spettacolari di arte anamorfica moderna sono realizzati da artisti “su strada”, che realizzano le loro opere all’aperto, disegnando anamorfosi prospettiche su piazze, strade e muri delle città. Le dimensioni di queste opere sono imponenti, fino a diverse centinaia di metri quadri, e l’effetto prospettico e tridimensionale è dirompente. Tra i maggiori artisti dell’anamorfosi su strada citiamo (in ordine alfabetico)

François Abelanet, Julian Beever, Leon Keer, Edgar Muller, Eduardo Relero, Manfred Stader, Kurt Wenner. Una ricerca dei loro nomi in internet porta alle foto e ai filmati di opere anamorfiche di grande impatto visivo.

In questo ambito di *street-art*, una forma originale di arte anamorfica moderna senza pitture è stata realizzata in occasione delle infiorate 2014 e 2015 di Cusano Mutri, in provincia di Benevento [31]. La figura 6a mostra il disegno anamorfico di un cubo realizzato con petali e semi, visto dal punto prospettico.



Figura 6a. Vista dal punto prospettico del cubo anamorfico realizzato con petali e semi in occasione dell'infiorata 2014 di Cusano Mutri. Tratto da [32].

La figura 6b mostra lo stesso cubo visto da una posizione laterale, da dove è possibile apprezzare la notevole deformazione anamorfica del cubo.



Figura 6b. Lo stesso cubo della figura 6a visto lateralmente. La deformazione anamorfica e le reali dimensioni del disegno sono evidenti. Tratto da [32].

Analogamente, la figura 7a mostra il disegno anamorfico di un televisore realizzato con petali e semi, osservato dal punto prospettico, mentre la figura 7b mostra lo stesso televisore visto lateralmente.



Figura 7a. Vista dal punto prospettico del televisore anamorfico realizzato con petali e semi in occasione dell'infiorata 2015 di Cusano Mutri. L'effetto tridimensionale, anticipato nella fig. 4, è notevole. Tratto da [32].



Figura 7b. Lo stesso televisore della figura 7a visto lateralmente. Il punto prospettico si trova a destra della foto. La deformazione anamorfica è evidente, e le reali dimensioni del disegno possono essere valutate confrontando l'altezza delle persone davanti e dietro al disegno. Tratto da [32].

Per quanto attesa in base allo schema nelle figure 1, 2 e 4, la deformazione anamorfica sorprende per il suo sviluppo. A prima vista, è difficile credere che la figura 7b sia una diversa visuale dello stesso disegno della figura 7a. Altri dettagli sulla realizzazione di anamorfofi floreali possono essere trovati alla pagina web [32].

Un'ulteriore esempio di tecniche anamorfiche è il *cinemascope*, un sistema di ripresa cinematografica che usa lenti cilindriche deformanti (anamorfiche) che comprimono l'immagine in fase di ripresa e la ridistendono in proiezione. Nel *cinemascope*, un fotogramma con un rapporto tra base ed altezza pari a circa 1.17 riesce ad immagazzinare le informazioni provenienti da una scena con rapporto 2.35, cioè con la 'larghezza' lunga più del doppio dell' 'altezza'. In questo modo, cambiando l'obiettivo di telecamera e proiettore è stato possibile proiettare filmati su schermi panoramici, senza modificare in modo significativo né le pellicole, né le macchine da presa, né i proiettori esistenti nelle sale. Va tuttavia precisato che questa tecnica di proiezione, ancorché chiamata "anamorfica" dagli addetti ai lavori [33], non lo è nel senso originale del termine. Infatti, d'accordo con Nicéron [5] l'anamorfo è una deformazione che viene corretta dalla prospettiva oppure dalla riflessione da uno specchio curvo solo osservando l'oggetto da un punto di vista privilegiato (prospettico), dal quale la figura appare "formata di nuovo". Nel caso del *cinemascope*, il punto prospettico non c'è.

5. Anamorfosi tridimensionali e percezione

Infine, è opportuno menzionare l'applicazione dell'anamorfosi allo studio del condizionamento delle forme ambientali sulla nostra percezione visiva. Uno degli esempi più noti è la stanza distorta ideata dal fisiologo Adelbert Ames [2, 3, 34] in cui le pareti sono trapezoidali e oblique rispetto all'osservatore, e il soffitto o il pavimento (o entrambi) sono inclinati. Le porte, le finestre e riquadri sulle pareti sono anch'essi trapezi.

Se guardiamo la camera attraverso un foro posizionato nel punto prospettico, perdiamo la visione binoculare che ci fornisce informazioni sulla profondità, e inoltre la camera ci appare normale e non distorta, come se fosse un parallelepipedo regolare: si tratta dunque di un anamorfismo in tre dimensioni.

Nella figura 8, due persone di uguale altezza che si posizionano agli angoli a sinistra e a destra in fondo alla camera di Ames ci appaiono di altezza diversa, perché si trovano a distanze differenti rispetto a noi e perché il loro capo si trova a diversa distanza dal soffitto [2, 34].

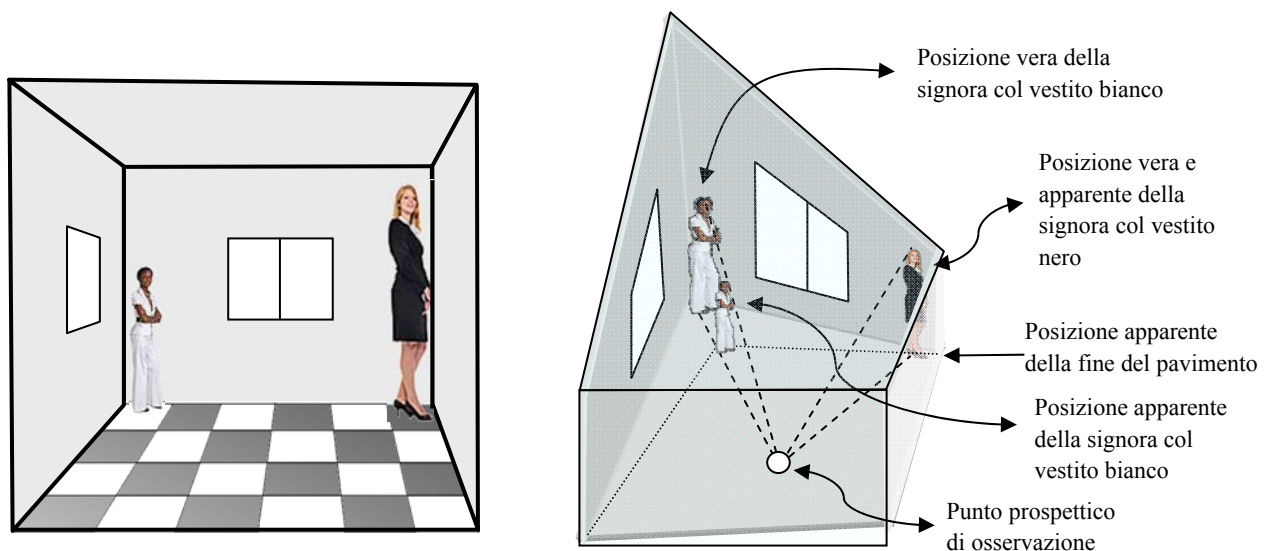


Figura 8. A sinistra: due persone di identica altezza appaiono molto diverse quando si posizionano agli angoli in fondo alla camera di Ames. A destra, la stessa camera vista in prospettiva permette di capire perché le persone appaiono di diversa altezza. Alla signora col vestito bianco si applica il concetto di prospettiva inversa (anamorfismo prospettico) descritto nel §2. Inoltre, la diversa altezza del soffitto negli angoli sinistro e destro (che non viene percepita dall'osservatore posto nel punto prospettico) aumenta l'effetto di distorsione dell'altezza apparente. Elaborazione ENEA.

L'osservatore percepisce una situazione ambigua, che consente due possibili interpretazioni: o la stanza è deformata, o le persone hanno altezze molto diverse. La sensazione che la stanza "deve" essere regolare

domina il quadro percettivo, e il nostro cervello preferisce ammettere che stiamo osservando un nano e un gigante piuttosto che la stanza sia deformata. Anche quando le persone si scambiano di posto e il nano diventa un gigante e viceversa (vedi il filmato [34]), l'evidente contraddizione non intacca la nostra assunzione che la stanza sia regolare.

Si può quindi comprendere come l'anamorfismo della camera di Ames abbia fornito importanti informazioni sulla psicologia della percezione visiva, sulla priorità data alle caratteristiche topologicamente invarianti (le pareti opposte delle camere sono sempre parallele) rispetto alle proprietà geometriche della prospettiva (la grandezza apparente degli oggetti dipende dalla distanza rispetto all'osservatore), sul fenomeno percettivo cosiddetto della "costanza delle dimensioni" [35], e di come le informazioni visive vengano elaborate dal cervello in modo da essere coerenti con le esperienze precedenti [36].

6. Riassunto e conclusioni

La parola "anamorfosi" è un neologismo del XVII secolo che significa "dare nuova forma ad una figura" [9] o anche "dare forma in modo contrario" [2]. L'osservatore posto in posizione frontale rispetto all'anamorfosi prospettica vede un disegno distorto, che viene percepito nelle corrette proporzioni solo spostandosi in una posizione fortemente obliqua rispetto al disegno, prossima alla superficie figurata o a un suo prolungamento, sulla verticale del punto prospettico. Leonardo da Vinci è stato il primo artista a disegnare un'anamorfosi e a suggerire una tecnica per realizzare anamorfosi tramite un foro attraverso cui far passare una luce che proietta su una parete l'ombra dell'oggetto che si vuol disegnare [1]. Leonardo stesso definisce questa tecnica "prospettiva accidentale", in contrapposizione alla "prospettiva naturale", perché oggetti lontani devono essere disegnati più grandi di quelli vicini, al contrario di quello che si osserva nella realtà.

Nonostante gli elementi di progetto delle anamorfosi sia prospettiche che catottriche siano stati presentati da Nicéron sin dal 1638 [5], la posizione del punto di osservazione per la ricostruzione di disegni deformati tramite anamorfosi prospettiche è conosciuta in modo empirico, come abbiamo discusso in dettaglio nel §2 dopo un'attenta lettura dei testi originali. Infatti, né Nicéron [5], né i numerosi studiosi che hanno affrontato il problema della costruzione anamorfica [4, 6–15, 20] hanno fornito una dimostrazione matematica rigorosa della posizione del punto di osservazione dell'anamorfosi prospettica, ad una distanza dalla parete del disegno uguale al segmento PR nelle figure 1 e 4, che di conseguenza assume il ruolo di assioma.

Nel §3 di questo Rapporto abbiamo presentato la prima dimostrazione analitica esatta dell'assioma di Nicéron sulla posizione del punto di osservazione per la ricostruzione di disegni deformati tramite anamorfosi prospettiche.

Nel §4 abbiamo riassunto le principali motivazioni degli artisti del XVI e XVII secolo per realizzare anamorfosi, basate sul gusto dell'illusione, della prospettiva bizzarra, della ricerca della sorpresa per generare lo stupore e la meraviglia dell'osservatore e dei committenti, ma anche per nascondere una mappa o un messaggio segreto [25], essendo l'anamorfosi una valida tecnica crittografica, che risulta particolarmente efficace e difficile da decrittare nel caso di anamorfosi catottrica conica, come discusso negli articoli [26, 27]. Inoltre, la matematica dei disegni anamorfici può essere usata nel progetto di sistemi ottici posti in un punto prospettico molto defilato rispetto alla scena da osservare, ad esempio per il riconoscimento spettroscopico di materiale pericoloso in uno scenario post attentato tramite fluorescenza indotta da laser, vedi la figura 5, studiato recentemente da ENEA [29].

Oggi giorno, l'applicazione più diffusa delle tecniche anamorfiche è nella cartellonistica pubblicitaria sui campi di calcio e nella Formula 1, che sfruttano l'effetto 3-D del disegno anamorfico descritto nel §3, anche se gli esempi più spettacolari di arte anamorfica moderna sono opere di imponenti dimensioni all'aperto, il cui effetto prospettico tridimensionale è dirompente [30]. In questo ambito di *street-art*, una forma originale di arte anamorfica senza pitture è stata creata in occasione delle infiorate 2014 e 2015 di Cusano Mutri, vedi le figure 6 e 7.

Il riconoscimento di forme e colori è il risultato di una miscela tra quello che vedono gli occhi e l'esperienza passata, il *deja vu* [35, 36]. In pratica, noi vediamo ciò che ci aspettiamo di vedere in base al contesto più probabile, oppure quello che riconosciamo in base alla memoria di immagini simili. In questo ambito, nel §5 abbiamo discusso il contributo dell'anamorfose tridimensionale allo studio e alla comprensione del condizionamento delle forme ambientali sulla nostra percezione visiva, tramite l'esempio della cosiddetta camera di Ames [34], vedi la figura 8.

Referenze

- [1] Leonardo da Vinci: Codice A (2172) dell'Istituto di Francia (circa 1515) fol 42v.
- [2] Paolo Di Lazzaro, Daniele Murra: “**L'anamorfoosi tra arte, percezione visiva e prospettive bizzarre**” RT/2013/05/ENEA (2013). ISSN: 0393-3016. <http://openarchive.enea.it/bitstream/handle/10840/4479/RT-2013-5-ENEA.pdf?sequence=1>
- [3] Paolo Di Lazzaro, Daniele Murra: “**Figurative art, perception and hidden images in inverse perspective**” Energia, Ambiente e Innovazione 1-2, pagg. 42-51 (2013). <http://www.enea.it/it/produzione-scientifica/pdf-eai/n.1-2-gennaio-aprile-2013/10-inverse-perspective-pdf>
- [4] Salomon de Caus: “**Perspective avec la raison des ombres et miroirs**” (Londra, 1612) cap. 28-29.
- [5] Jean François Nicéron: “**La perspective curieuse, ou magie artificielle des effets merveilleux de l'optique par la vision directe...**” (Parigi, 1638). Una seconda versione, più elaborata, fu pubblicata nel 1652, e di questa vi è una traduzione, postuma, in lingua latina: “**Thamaturgus Opticus, seu admiranda Optices per radium directum...**” (Parigi 1646, Langlois e 1669, Du Puis).
- [6] Daniele Barbaro: “**La pratica della prospettiva**” (Venezia, 1568). Parte quinta.
- [7] Jacopo Barozzi, detto il Vignola: “**Le due Regole della prospettiva pratica**”, con i commentari del R.P.M. Egnatio Danti (Roma, 1583), Cap. VIII.
- [8] Giovanni Paolo Lomazzo: “**Trattato dell'arte della pittura, scultura ed architettura**” (Milano, 1585). Sesto Libro.
- [9] Athanasius Kircher: “**Ars Magna lucis et umbrae**” (Roma, 1646), Liber II Pars II.
- [10] Emmanuel Maignan: “**Perspectiva horaria, sive de horographia gnomonica**” (Roma, 1648), Liber Terzius.
- [11] Gaspard Schott: “**Magia universalis naturae et artis**” (Würtzburg, 1657). Partis I Liber III Pars I.
- [12] Gregoire Huret: “**Optique de portraiture et peinture**” (Parigi, 1670).
- [13] Martin Gardner: “**L'affascinante magia dell'arte anamorfica**” Le Scienze n. 81 vol. XIV pagg. 92-99 (Maggio 1975).
- [14] James Hunt, Bernie Nickel, Christian Gigault: “**Anamorphic images**” American Journal of Physics **68**, pagg. 232-237 (2000). DOI: 10.1119/1.19406.
- [15] Andrey Gitin: “**Anamorphosis and distortion**” Optics and Spectroscopy **88**, pagg. 472-474 (2000).
- [16] Leon Battista Alberti: “**De Pictura**” (1435), nell'edizione composta a Padova da Antonio Bovolenta nel 1518 (Lucca, Biblioteca Governativa, Ms. 1448).
- [17] Piero della Francesca: “**De Prospectiva Pingendi**” (circa 1475).
- [18] Jacques Androvet Du Cerceau: “**Leçon de perspective positive**” (Parigi 1576).
- [19] Vedi ad esempio: Federigo Enriques, Ugo Amaldi: “**Elementi di geometria**” cap. XII (Edizioni Studio Tesi Srl, Zanichelli editore, 1992) ISBN 88-7692-340-3.
- [20] Agostino De Rosa: “**Le prospettive di Jean François Nicéron: tra teoria geometrico-matematica e sperimentazione artistica**” in: *La geometria descrittiva dalla tradizione alla innovazione*, a cura di C. Cundari, R. Migliari, pagg. 95-120 (Aracne S.r.l., 2014). ISBN: 8854875325, 9788854875326 https://www.academia.edu/12399887/A_De_Rosa_2014_Le_prospettive_di_Jean_Fran%27ois_Nic%C3%A7ron_tra_teor%C3%A7a_geometrico-matematica_e_sperimentazione_artistica. In Cesare Cundari Riccardo Migliari a cura di. *La geometria descrittiva dalla tradizione alla innovazione*. p. 95-120 Roma ARACNE editrice S.r.l. ISBN 9788854875326

- [21] Abside della chiesa di S. Maria presso S. Satiro a Milano http://it.wikipedia.org/wiki/Chiesa_di_Santa_Maria_presso_San_Satiro
- [22] Teatro Olimpico palladiano a Vicenza: http://it.wikipedia.org/wiki/Teatro_Olimpico
- [23] Soffitto e falsa cupola della chiesa di S. Ignazio a Roma http://it.wikipedia.org/wiki/Chiesa_di_Sant'Ignazio_di_Loyola_in_Campo_Marzio
- [24] Corridoio di Palazzo Spada a Roma: http://it.wikipedia.org/wiki/Palazzo_Spada
- [25] Pietro Accolti: **“Lo inganno degli occhi”** (Firenze, 1625) cap. XXXVI pag. 48.
- [26] Daniele Murra, Paolo Di Lazzaro: **“Analytical treatment and experiments of the virtual image of cone mirrors”** Applied Physics B **117**, pagg. 145-150 (2014). DOI 10.1007/s00340-014-5814-1 <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00340-014-5814-1>
- [27] Daniele Murra, Paolo Di Lazzaro: **“Immagine virtuale di specchi conici per anamorfofi: calcolo analitico ed esperimenti”** RT/2013/23/ENEA (2013). ISSN: 0393-3016. <http://openarchive.enea.it/bitstream/handle/10840/4859/RT-2013-23-ENEA.pdf?sequence=1>
- [28] Progetto europeo FORLAB <http://www.fp7-forlab.eu/>
- [29] <http://www.enea.it/it/comunicare-la-ricerca/documenti/news/NotaTecnicaAnamorfofi.pdf>
- [30] Filmato sulla percezione tridimensionale di anamorfofi prospettiche di grandi dimensioni **“An impossible made possible”**: <https://www.youtube.com/watch?v=A9G-cwylC1E>
- [31] Video amatoriale realizzato con un drone durante l’infiorata del Corpus Domini 2014 di Cusano Mutri <https://www.youtube.com/watch?v=x7FIMTWLjrY> in cui l’anamorfofi del cubo nella figura 6 viene ripresa dall’alto, rendendo evidente lo sviluppo della deformazione anamorfica.
- [32] <http://www.pvitelli.net/2014/07/10/anamorfofi-floreal/>
- [33] Peter Lev: **“Transforming the screen, 1950-1959”** (University of California Press, Berkeley 2003) pagg. 115 e seguenti.
- [34] Filmato sull’effetto percettivo della camera di Ames <https://www.youtube.com/watch?v=Ttd0YjXF0no>
- [35] Malcom Hardy, Steve Heyes: **“Introduzione alla psicologia”** (Feltrinelli, Milano, 1983) pagg. 79-81. ISBN: 9788807100079.
- [36] Paolo Di Lazzaro, Daniele Murra: **“Luce e visione, un binomio (quasi) perfetto”** Energia, Ambiente e Innovazione n. 4, pagg. 58-63 (2014). DOI 10.12910/EAI2014-71 <http://www.enea.it/it/produzione-scientifica/pdf-eai/n-4-2014/Luceevisione.pdf>

Edito dall'ENEA
Servizio Promozione e Comunicazione
Lungotevere Thaon di Revel, 76 - 00196 Roma

www.enea.it

Pervenuto il 27.11.2015

Stampato presso il Laboratorio Tecnografico ENEA - C.R. Frascati
Finito di stampare nel mese di novembre 2015