

**Titolo**

**Metodo per la stima del punto caldo di un nocciolo di reattore nucleare basato su tecniche perturbative generalizzate (GPT)**

**Descrittori**

Tipologia del documento:

Collocazione contrattuale: Accordo di programma ENEA-MSE: tema di ricerca "Nuovo nucleare da fissione"

Argomenti trattati: strumentazione in-core, misure di flusso neutronico, metodi perturbativi generalizzati.

**Sommario**

Viene descritto un metodo mediante il quale l'informazione ottenuta in tempo reale attraverso un sistema di dispositivi di misura neutronica SPND (collettroni) inseriti nel nocciolo di un reattore nucleare di potenza (in particolare, un PWR) consente la rilevazione in tempo reale di un eventuale punto caldo durante l'operazione dell'impianto. Il metodo si basa sulle tecniche perturbative GPT (Generalized Perturbation Methods), per il calcolo dei coefficienti di sensitività delle quantità integrali misurate con i collettroni rispetto ai parametri considerati per rappresentare il punto caldo, e nell'uso di tecniche di inferenza statistica che tengono conto degli errori associati alle misure. La metodologia consente anche di valutare l'effetto sulla qualità del sistema di rilevazione dovuto al possibile degradarsi dei dispositivi di misura durante il ciclo di vita del nocciolo. Questa informazione può essere utilizzata per poter predisporre una strategia di protezione adeguata in termini di qualità, numero e distribuzione dei collettroni.

**Note**

Autori: A. Gandini, F. Pisacane

Lavoro svolto in esecuzione della Linea Progettuale LP1 - Obiettivo D dell'AdP ENEA-MSE

Tema di ricerca: "Nuovo Nucleare da Fissione"

Copia n.

In carico a:

2			NOME			
			FIRMA			
1			NOME			
			FIRMA			
0	EMISSIONE	13/9/2011	NOME	F. Pisacane	M. Sepielli	P. Meloni
			FIRMA			
REV.	DESCRIZIONE	DATA	REDAZIONE	CONVALIDA	APPROVAZIONE	

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	2	15

## Indice

1. Introduzione .....	3
2. Definizioni .....	3
3. Localizzazione della posizione del punto caldo .....	5
4. Analisi statistica .....	6
5. Previsione di punto caldo .....	7
5.1. <i>Degradazione del sistema di collettroni</i> .....	7
6. Generalizzazione del metodo .....	8
7. Conclusione .....	9
Appendice. Metodi di inferenza statistica.....	10
A.1. <i>Metodo di riduzione mediante i moltiplicatori di Lagrange</i> .....	12
A.2. <i>Metodo di riduzione per elementi</i> .....	13
A.3. <i>Applicazione del metodo di riduzione statistica per         l'identificazione del punto caldo</i> .....	13
Riferimenti .....	15

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	3	15

## 1. Introduzione

Uno dei problemi che si pone durante l'operazione di un reattore nucleare, in particolare un impianto PWR, è la formazione nel nocciolo di punti caldi (hot spots), cioè punti in cui il rapporto tra la densità di potenza lineare dell'elemento di combustibile ed il suo valor medio in condizioni nominali eccede una soglia prefissata. Per la loro identificazione on-line nell'ambito di un sistema di protezione, è stato proposto di adottare dispositivi in-core denominati self-powered neutron detectors (SPNDs) od anche "collettroni" (collectrons) [1,2]. Tali dispositivi, opportunamente calibrati in condizioni nominali, misurano in tempo reale in vari punti del nocciolo durante l'operazione del reattore il tasso di cattura di un materiale scelto (p.es., rodio, o cobalto) consentendo di ottenere immediatamente in maniera indiretta informazioni sui valori di eventuali alterazioni del flusso neutronico, e quindi dei tassi di fissione negli elementi di combustibile. Questi valori vengono a loro volta utilizzati, tramite un apposito algoritmo, per identificare l'eventuale presenza, e posizione, di "punto caldo" (hot spot).

Per motivi di funzionamento e di sicurezza, è importante poter quantificare l'aumento d'incertezza sul valore ricostruito di punto caldo, quando uno o più dispositivi SPNDs si guastano, cioè si possa determinare se, in alcuni casi, l'incertezza che incide sul valore ricostruito della densità di potenza lineare nel punto caldo porti a superare limiti accettabili predefiniti.

## 2. Definizioni

Consideriamo un determinato reattore PWR. Assumiamo che un numero prefissato (N) di collettroni vengano posizionati nel nocciolo. Assumiamo quindi un numero (M, al limite 1) di ipotetiche posizioni di punto caldo<sup>1</sup>. Per semplificare la presentazione del metodo, senza pregiudicare, come si chiarirà nel seguito, la sua possibilità di estensione a casi più complessi, assumiamo che il nocciolo possa essere rappresentato in geometria bidimensionale (x,y).

Assumiamo per ora l'ipotesi che in ogni condizione, nominale o meno, per ogni indice m sia costante il valore del rapporto

$$r_m \square p_m^{\max} / \bar{p}_m \tag{1}$$

tra la densità di potenza lineare massima e la densità di potenza lineare media in ciascuna posizione m.

<sup>1</sup> L'aumento di potenza in un punto caldo all'interno di una data cella di combustibile è associato ad un corrispondente aumento della sorgente dei neutroni di fissione. Per semplificare il numero di calcoli necessari per la ricerca di punto caldo, questo aumento della sorgente di fissione può essere spalmato in un più ampio insieme di celle circostanti (al limite, un elemento di combustibile) definendo così il volume associato alla 'posizione di punto caldo' considerata. Se il caso, potrebbe seguire una nuova serie di calcoli più specifici per una localizzazione più precisa.

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	4	15

Indichiamo con  $p_m^{\max,1}$  una prima soglia del valore della densità di potenza lineare relativo a ciascuno degli  $M$  possibili punti caldi considerati, oltre la quale dovrebbe scattare un allarme di attenzione, e con  $p_m^{\max,2}$  una seconda soglia oltre la quale dovrebbe scattare l'arresto dell'impianto.

Dall'analisi del segnale dato dai collettroni si vuole determinare la presenza o meno di possibili condizioni di punto caldo in una di possibili posizioni  $M$ , sulla base delle soglie assegnate

Si parte da un calcolo della distribuzione spaziale della densità di potenza (che può agevolmente essere rappresentata del tasso di fissione corrispondente).

Si definisce innanzitutto la quantità

$$R_n \square \frac{Q_n}{F_{\text{core}}} = \frac{\langle \sigma_r^T \mathbf{f} \rangle_{(\text{collectron})}}{\langle \sigma_f^T \mathbf{f} \rangle_{(\text{core})}}, \quad (2)$$

cioè il rapporto tra il tasso di reazione nel generico collettore  $n$  (caratterizzato dalla sezione macroscopica di reazione  $\sigma_r$ , espressa in forma multigruppo) ed il tasso di fissione dell'intero nocciolo. Si considera quindi una sorgente neutronica ('esterna', cioè non associata a reazioni di fissione nel combustibile) in corrispondenza dell'elemento di combustibile  $m$  data dall'espressione

$$s_m \pi \xi_m(\mathbf{r}) \quad (3)$$

dove  $s_m$  è una quantità scalare,  $\pi$  rappresenta lo spettro di fissione e  $\xi_m(\mathbf{r})$  è una funzione eguale ad uno all'interno del volume associato alla posizione  $m$  del punto caldo ed eguale a zero al di fuori di esso. Considerare una sorgente con spettro di fissione esterna in questo caso equivale, in rapporto all'effetto sui collettroni, a considerare un ipotetico evento incidentale che produca nell'elemento di combustibile considerato un equivalente aumento della sorgente (questa volta 'interna') di fissione.

Introduciamo a questo punto i coefficienti di sensitività

$$w_{n,m} = \frac{dR_n}{ds_m} \quad (4)$$

Secondo la teoria delle perturbazioni generalizzate (GPT) (v. Appendice 1) questi coefficienti possono essere calcolati utilizzando l'espressione<sup>2</sup>

<sup>2</sup> La metodologia GPT qui considerata si riferisce al caso generale di un reattore in condizioni stazionarie con o senza sorgente esterna [4]. Come noto [5], nel caso in cui il sistema imperturbato sia critico, in presenza di una perturbazione dei parametri che caratterizzano l'operatore di Boltzman, la metodologia GPT impone che la funzione importanza sia ottenuta imponendo il mantenimento delle condizioni critiche (attraverso una opportuna variazione di un parametro di controllo, generalmente un coefficiente moltiplicatore,  $\lambda$ , dell'operatore di fissione). Nel caso più generale di un reattore con sorgente esterna, ed in cui la perturbazione interessi la sorgente esterna stessa, la metodologia GPT impone che il calcolo

$$w_{n,m} = \langle \bar{\psi}_n^{*T} | \xi(r_m) v^{-1} \rangle \quad (5)$$

dove  $v$  la matrice diagonale delle velocità (per cui  $v^{-1}$  è la densità neutronica) e  $\bar{\psi}_n^*$  la funzione importanza associata al funzionale  $R_n$ . Essa soddisfa l'equazione

$$\mathbf{B}^* \bar{\psi}_n^* + \left[ \frac{\sigma_r}{Q_n} \xi_n(r) - \frac{\sigma_f}{F_{\text{core}}} v \right]^{-1} = 0 \quad \text{volume occupato} \quad (6)$$

essendo  $\mathbf{B}$  l'operatore che governa il flusso neutronico e  $\xi_n(r)$  una funzione eguale ad uno all'interno del volume del materiale utilizzato per la reazione di rivelazione nel collettore n (o in volume equivalente in cui esso possa essere stato omogeneizzato) ed eguale a zero al di fuori di esso.

### 3. Localizzazione della posizione del punto caldo potenziale

Ciascun coefficiente di sensitività  $w_{n,m}$  definito dall'Eq.(5) rappresenta il contributo di un neutrone di fissione nel punto m alla misura nel collettore n. Tali coefficienti formano quindi un vettore  $\mathbf{w}_m = [w_{1m} \dots w_{Nm}]^T$  caratteristico di ciascuna ipotetica posizione m di punto caldo.

Data una serie di misure  $R_n^{\text{ex}}$ , una ricerca di un eventuale punto caldo avrà inizio allorché i valori di una, o più componenti  $R_n^{\text{ex}}$  si differenzieranno significativamente (cioè, al di là di margini d'incertezza fissati) dai valori nominali  $R_{o,n}$ . In questo caso saranno scelte come posizioni più probabili quelle per le quali la distribuzione delle componenti del vettore  $\mathbf{w}_m$  sarà più vicina alla distribuzione delle componenti del vettore  $(R^{\text{ex}} - R_o)$ , dove  $R_o = [R_{o,1} \dots R_{o,N}]^T$ , vale a dire quelle per cui, entro una range d'incertezza fissato sulla base della precisione delle misure, è minima la somma

$$\sum_{n=1}^N \left[ \alpha_1 (R_n^{\text{ex}} - R_{o,n}) + \alpha_{2,m} w_{n,m'} \right]^2 \quad (7)$$

dove  $m'$  rappresenta l'indice degli  $M'$  punti che soddisfano tale condizione, e dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_{2,m}$  sono coefficienti di normalizzazione, ossia

---

della funzione sia ottenuto imponendo il mantenimento del livello della potenza (o, che è lo stesso, del tasso globale di fissione importanza). Nel nostro caso quindi, se il sistema imperturbato è critico, l'introduzione di una sorgente esterna come perturbazione imporrebbe, per mantenere lo stesso livello di potenza, una opportuna riduzione del fattore di moltiplicazione attraverso la variazione di un analogo parametro di controllo. In prossimità di condizioni critiche, tuttavia, la funzione importanza risulta praticamente eguale a quella corrispondente al sistema omogeneo[4].

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sum_{n=1}^N (R_n^{\text{ex}} - R_{o,n})}, \quad \alpha_{2,m'} = \frac{1}{\sum_{n=1}^N w_{n,m'}} \quad (m' = 1, 2, \dots, M') \quad (8)$$

#### 4. Analisi statistica

Assumiamo che in caso della presenza di punto caldo, essa sia (conservativamente) attribuibile ad una sola posizione tra quelle,  $M'$ , tra quelle localizzate con la metodologia su descritta. Per ciascuna di queste posizioni procediamo per ottenere una stima del valore più probabile  $\tilde{s}_{m'}$  e dell'incertezza ad esso associata., Secondo il metodo di analisi statistica della 'massima verosimiglianza' ('maximum likelihood'), o metodi equivalenti, sempre basati su principi Bayesiani di inferenza, tra cui il metodo della massima entropia d'informazione [6], dato un set di scarti  $\Delta R_n$  tra valori misurati in tempo reale durante l'operazione e valori nominali ('calcolati'), con associate incertezze sperimentali  $\varepsilon_n$ , è possibile determinare il valore più probabile  $\tilde{s}_{m'}$ , tale da render conto di tali differenze (v. Appendice). A questo valore  $\tilde{s}_{m'}$  può venire associata una differenza corrispondente  $\Delta \bar{p}_{m'}$  (con relative stima di incertezza) sulla base della relazione

$$\Delta \bar{p}_{m'} = \frac{\langle \Delta \sigma^T \sigma_f \rangle_{(m')}}{L_f} = \frac{\tilde{s}_{m'}}{\nu L_f} \quad (9)$$

dove  $\langle \Delta \sigma^T \sigma_f \rangle_{(m')}$  è la variazione del tasso di fissione corrispondente la punto caldo integrato nel volume relativo alla posizione  $m'$  mentre  $L_f$  è la lunghezza della zona attiva del nocciolo. Sulla base dell'Eq. (1), possiamo scrivere il valore stimato

$$\tilde{p}_{m'}^{\text{max}} = r_m (\bar{p}_{m'} + \Delta \bar{p}_{m'}) . \quad (10)$$

Al valore  $\tilde{p}_{m'}^{\text{max}}$  sarà associata una incertezza stimata che indichiamo con  $\tilde{\xi}_{m'}$ .

#### 5. Previsione di punto caldo

Le stime  $\tilde{p}_{m'}^{\text{max}} \square \tilde{\xi}_{m'}$  così ottenute vengono confrontate con i valori  $p_{m'}^{\text{max},1}$  e  $p_{m'}^{\text{max},2}$  per decidere l'eventuale decisione da prendere. Tale decisione dipenderà sia dal valore delle potenze lineari stimate sia dall'incertezza associata.

##### 5.1. Degradazione del sistema di collettroni

La metodologia su descritta consente di valutare agevolmente l'incidenza della degradazione dell'informazione con il guastarsi dei collettroni. Per dimostrarlo, assumiamo di conoscere il rateo medio annuo di guasto (e quindi il tempo medio al guasto). Durante un ciclo di vita del nocciolo avverranno quindi in media un certo numero di eventi di guasto. Assumendo in corrispondenza a questi eventi una distribuzione di probabilità assegnata, per esempio di tipo esponenziale<sup>3</sup> nel caso di eventi spuri indipendenti dal tempo di funzionamento, o Weibull<sup>4</sup> nel caso si debba tener conto dell'invecchiamento della strumentazione, possiamo ottenere delle storie random di eventi di guasto secondo la distribuzione fissata [7].

Scegliamo alcune storie di guasti successivi durante il ciclo di vita del nocciolo. Per ciascuna storia escludiamo dal set i collettroni che via via si guastano.

Scegliamo una prima storia ed assumiamo, mediante l'introduzione fittizia di una sorgente esterna con distribuzione energetica eguale a quella di fissione, che in un punto  $n'$ , scelto a caso tra quelli ipotizzati, si verifichi un evento che porti alla formazione di punto caldo<sup>5</sup>. Attraverso una simulazione numerica, calcoliamo i valori perturbati (pseudo-sperimentali)  $R_n^{ex}$  ed eseguiamo un primo esercizio di valutazione seguendo la metodologia su descritta (con tutti i collettroni regolarmente funzionanti). Si otterranno così dei valori  $\tilde{\xi}_m$ , e, corrispondentemente, delle stime  $\tilde{p}_m^{max} \square \tilde{\xi}_m$ , che, se il numero, la disposizione e la precisione di misura assunta dei collettroni sono adeguati, dovrebbe segnalare la presenza del punto caldo ipotizzato.

Ripetiamo l'esercizio sopra descritto al tempo del primo guasto supponendo che l'evento che porta alla formazione di punto caldo avvenga subito dopo di esso e con le stesse modalità del primo. Il collettore guastato verrà escluso dall'esercizio stesso. Si otterranno nuove stime  $\tilde{p}_m^{max}$ . Le incertezze associate  $\tilde{\xi}_m$  ottenute seguendo la medesima procedura saranno maggiori, data la minore informazione disponibile, rendendo più problematica l'interpretazione dei risultati.

Si può quindi procedere al secondo guasto, e così via per i successivi della storia di guasti considerata. Con il degradarsi dell'informazione le incertezze delle stime risultanti diverranno via via maggiori. Con l'ampliarsi di queste incertezze i margini di errore di cui dover tener conto renderanno il sistema di protezione gradualmente meno praticabile, e costringeranno ad arrestarlo in anticipo rispetto ai tempi previsti. Se questa eventualità si riscontra per una qualsiasi delle possibili storie di guasti, si dovrà provvedere all'aumento del numero di collettroni, o ad una loro diversa distribuzione, o ad un loro miglioramento per renderli più affidabili.

<sup>3</sup> Data dalla funzione di distribuzione  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , essendo  $\lambda$  l'inverso del tempo medio al guasto.

<sup>4</sup> Data dalla funzione di distribuzione  $f(t) = \lambda(t)e^{-\lambda(t)t/\beta}$ , dove  $\lambda = \alpha\beta t^{\beta-1}$  ed  $\alpha$  è un parametro di scala. I

parametri  $\alpha$  e  $\beta$  si ritengono noti sulla base di informazioni sperimentali precedenti che ne consentano la determinazione mediante il metodo dei parametri [8]. Generalmente la funzione di Weibull ha una forma a 'vasca da bagno', caratterizzata da un andamento iniziale in cui  $\beta < 1$  (in presenza di difetti di fabbricazione), un periodo utile in cui  $\beta = 0$  ed un andamento finale di invecchiamento in cui  $\beta > 1$ .

<sup>5</sup> Anche in questo caso il calcolo dei flussi avverrà considerando un reattore sottocritico con sorgente esterna caratterizzato da un coefficiente di moltiplicazione ( $< 1$ ) tale da mantenere inalterata la potenza nominale globale.

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	8	15

La metodologia potrebbe consentire anche una riduzione del numero di collettroni nel caso esso, seguendo la medesima procedura, risultasse essere ridondante.

## 6. Generalizzazione del metodo

Finora abbiamo assunto un sistema rappresentato da una geometria bidimensionale (x,y). Nel caso di una geometria tridimensionale (x,y,z) si seguirà una procedura analoga considerando la disposizione di collettroni in posizioni radiali ed assiali n,k (n=1,2,...,N; k=1,2,...,K). In ciascuna di queste posizioni verrà misurata la quantità

$$R_{nk} \approx \frac{Q_{nk}}{F_{core}} \quad (11)$$

Analogamente, le posizioni di ipotetici punti caldi saranno identificati con indici radiali ed assiali m,h (n=1,2,...,M; h=1,2,...,H). Potranno quindi essere considerati dei coefficienti di sensitività  $c_{nm}^{kh}$ , corrispondenti al contributo di un neutrone di fissione nel punto (m,h) alla misura nel collettore nella posizione (n,k), e definiti dall'equazione

$$c_{nm}^{kh} = \langle \xi_{nk}^{*T} \chi \xi_{m,h} \rangle^{-1} \quad (12)$$

dove  $\xi_{m,h}(\mathbf{r})$  è una funzione eguale ad uno all'interno del volume associato alla posizione di punto caldo (m,h) ed eguale a zero al di fuori di esso. A ciascuna sorgente di fissione a tasso unitario posta in una posizione (m,h) corrisponderà, in luogo di un vettore caratteristico come nel caso di geometria bidimensionale, una matrice caratteristica (di dimensioni NxK) di coefficienti di sensitività. Seguendo una procedura analoga a quella utilizzata nel caso bidimensionale si potranno localizzare alcune posizioni (m',h') più probabili di punto caldo.

Dato un set di scarti  $\Delta R_{nk}$  tra valori misurati e calcolati, con associati errori sperimentali  $\varepsilon_{nk}$ , è possibile anche in questo caso, seguendo una procedura analoga a quella seguita nel caso bidimensionale, localizzare e ottenere delle stime di eventuali punti caldi.

## 7. Conclusioni

L'uso della metodologia GPT consente di costruire un sistema diagnostico 'on-line' di punto caldo che utilizza al meglio l'informazione disponibile in tempo reale ricavata dalle misure con i collettroni..




 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	9	15

I calcoli da effettuare sono veloci. Una volta calcolate le funzioni importanza necessarie, la determinazione dei coefficienti di sensibilità in relazione a qualsiasi posizione ipotetica di punto caldo consiste meramente in una serie di semplici operazioni algebriche di somma.

La metodologia consente altresì di valutare la degradazione del sistema di rilevazione a seguito di possibili guasti dei collettroni, e di decidere quindi sul loro numero ottimale per un intero ciclo di vita del nocciolo e sulla loro migliore distribuzione.

Il numero di funzioni importanza da calcolare è rappresentato, nel caso più generale, dal prodotto del numero di posizioni radiali dei collettroni per quello delle loro posizioni assiali. Tale numero può essere ridotto se i collettroni sono disposti in posizioni omologhe, tali cioè da consentire di ottenere più funzioni importanza effettuando opportune rimappature attorno all'asse centrale e/o ribaltamenti assiali attorno al piano centrale di una stessa funzione.

L'implementazione del metodo ed uno studio esplorativo di applicazione dello stesso è previsto in una fase successiva del lavoro.

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	10	15

## Appendice. Metodi di inferenza statistica

Consideriamo un numero  $L$  di quantità integrali, o risposte,  $Q_l$  relative ad uno dato sistema e un set di  $J$  parametri  $p_j$  soggetti a perturbazione. Assumiamo che in relazione a queste quantità  $Q_l$  e parametri  $p_j$  siano disponibili corrispondenti valori sperimentali  $Q_l^{ex}$  e valori sperimentali, o altrimenti coerentemente determinati,  $p_j^{ex}$ , assieme alle stime delle loro incertezze, eventualmente attraverso un matrice di dispersione assegnata.

Se  $Q_l$  e  $p_j$  rappresentano valori veri, le quantità  $Q_l$  possono essere espresse come funzioni dei parametri  $p_j$ , cioè

$$Q_l = Q_l(p_1, p_2, \dots, p_J). \quad (A.1)$$

Se assumiamo un determinato set di valori  $p_{o,j}$  prossimi a quelli veri  $p_j$ , possiamo espandere l'Eq.(A.1). Trascurando termini superiori al primo ordine, si avrà

$$Q_l = Q_l(p_{o,1}, p_{o,2}, \dots, p_{o,J}) + \sum_{j=1}^J \frac{dQ_l}{dp_j} (p_j - p_{o,j}) \quad (A.2)$$

Le quantità  $Q_l$  calcolate sulla base dei valori dei parametri  $p_{o,j}$  saranno denotate  $Q_l^{cal}$ , cioè

$$Q_l^{cal} = Q_l(p_{o,1}, p_{o,2}, \dots, p_{o,J}) \quad (l = 1, 2, \dots, L) \quad (A.3)$$

Definiamo le quantità


$$y_j = (p_j - p_{o,j}) \quad (j = 1, 2, \dots, J) \quad (A.4)$$

$$y_{J+1} = (Q_l - Q_l^{cal}) \quad (l = 1, 2, \dots, L) \quad (A.5)$$

$$s_{1,j} = \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} \quad (l = 1, 2, \dots, L; \quad j = 1, 2, \dots, J) \quad (A.6)$$

dove i coefficienti di sensitività  $s_{1,j}$  sono calcolati attraverso i metodi GPT.

Introduciamo i vettori

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	11	15

$$\mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_J \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_Q = \begin{pmatrix} y_{J+1} \\ \vdots \\ y_{J+L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}_Q \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

e la matrice

$$\mathbf{W} = |\mathbf{S} - \mathbf{U}| \quad (\text{A.8})$$

dove  $\mathbf{U}$  è una matrice unitaria  $L \times L$ , mentre con  $\mathbf{S}$  indichiamo la matrice di sensitività

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,J} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \dots & s_{2,J} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{L,1} & s_{L,2} & \dots & s_{L,J} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

L'equazione (A.2) potrà quindi scriversi nella forma vettoriale

$$\mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

Con questo metodo ci si propone di ottenere la miglior stima dei parametri  $p$  sulla base dell'informazione sperimentale disponibile che possiamo definire associata alle quantità

$$y_j^{\text{ex}} = (p_j^{\text{ex}} - p_{o,j}) \quad (j=1,2,\dots,J)^6 \quad (\text{A.11})$$

$$y_{J+1}^{\text{ex}} = (Q_1^{\text{ex}} - Q_1^{\text{cal}}) \quad (l = 1,2,\dots,L) \quad (\text{A.12})$$

dove  $Q_1^{\text{ex}}$  sono i valori integrali ottenuti sperimentalmente, mentre  $p_j^{\text{ex}}$  sono i valori, da cui i primi dipendono, che possono essere ottenuti sia sperimentalmente, sia attraverso modelli teorici, o altre ipotesi<sup>7</sup>.

Alle quantità  $Q_1^{\text{ex}}$  e  $p_j^{\text{ex}}$  vengono generalmente associate stime di errori, o incertezze, rappresentate da matrici di dispersione (o di varianza/covarianza)  $\mathbf{C}_Q$  e  $\mathbf{C}_p$ , rispettivamente. Si potrà quindi scrivere la matrice di dispersione di entrambi le quantità:

<sup>6</sup> I valori indicati con  $p_j^{\text{ex}}$  possono essere ottenuti sia in via sperimentale, sia attraverso modelli teorici, o altre ipotesi.

<sup>7</sup> Nell'ambito del metodo di inferenza Bayesiana, le quantità  $p_j^{\text{ex}}$  vengono associate all'informazione cosiddetta 'a priori', mentre le quantità  $Q_1^{\text{ex}}$  vengono generalmente associate a quella 'a posteriori'.

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	12	15

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_Q \end{vmatrix} \quad (\text{A.13})$$

in cui il generico elemento  $c_{ik}$  è il valore atteso:

$$c_{ik} = E[(y_i^{\text{ex}} - y_i)(y_k^{\text{ex}} - y_k)] \quad (\text{A.14})$$

La funzione di verosimiglianza per il vettore  $\mathbf{y}$  sarà in questo caso definita dall'espressione

$$L(\mathbf{y} | \mathbf{y}^{\text{ex}}) = \frac{1}{(2\pi)^{(L+J)/2} \det \mathbf{C}_y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}^{\text{ex}} - \mathbf{y})^T \mathbf{C}_y^{-1} (\mathbf{y}^{\text{ex}} - \mathbf{y}) \right\} \quad (\text{A.15})$$

Questa funzione risulta massima, e quindi corrispondente ai valori di  $\mathbf{y}$  più probabili, se verrà scelto uno stimatore  $\tilde{\mathbf{y}}$  di  $\mathbf{y}$  tale che il prodotto

$$(\mathbf{y}^{\text{ex}} - \mathbf{y})^T \mathbf{C}_y^{-1} (\mathbf{y}^{\text{ex}} - \mathbf{y}) = \text{minimum} \quad (\text{A.16})$$

con i vincoli

$$\mathbf{W}\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.17})$$

#### A.1. Metodo di riduzione mediante i moltiplicatori di Lagrange.

Il vettore  $\tilde{\mathbf{y}}$ , e quindi  $\tilde{\mathbf{y}}_p$  ed  $\tilde{\mathbf{y}}_Q$ , possono essere ottenuti mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [8]. Si ottengono così le stime

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{\text{ex}} + \mathbf{C}_p \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{C}_y \mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{W} \mathbf{y}^{\text{ex}} \quad (\text{A.18})$$

ed in particolare, per quanto riguarda le stime  $\tilde{\mathbf{y}}_p$ ,

$$\tilde{\mathbf{y}}_p = \mathbf{y}_p^{\text{ex}} + \mathbf{C}_p \mathbf{S}^T (\mathbf{C}_Q + \mathbf{S} \mathbf{C}_p \mathbf{S}^T)^{-1} (\mathbf{y}_Q^{\text{ex}} - \mathbf{S} \mathbf{y}_p^{\text{ex}}). \quad (\text{A.19})$$

Se i valori di partenza che definiscono il vettore  $\mathbf{p}_0$  sono assunti numericamente coincidenti con quelli che definiscono il vettore  $\mathbf{p}^{\text{ex}}$ , dalla (A.11) si ha  $\mathbf{y}_p^{\text{ex}} = \mathbf{0}$  e quindi l'Eq.(A.19) si riduce a

$$\tilde{\mathbf{y}}_p = \mathbf{C}_p \mathbf{S}^T (\mathbf{C}_Q + \mathbf{S} \mathbf{C}_p \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{y}_Q^{\text{ex}} \quad (\text{A.20})$$

La matrice di dispersione degli errori associati alle quantità  $\tilde{\mathbf{y}}_p$  risulta infine

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	13	15

$$\tilde{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_p \mathbf{S}^T (\mathbf{C}_Q + \mathbf{S} \mathbf{C}_p \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S} \mathbf{C}_p . \quad (\text{A.21})$$

### A.2. Metodo di riduzione per elementi

Nel metodo di riduzione mediante i moltiplicatori di Lagrange la matrice da invertire che compare nelle equazioni (A.20) e (A.21), cioè  $(\mathbf{C}_Q + \mathbf{S} \mathbf{C}_p \mathbf{S}^T)$ , ha le dimensioni date dal numero di quantità integrali, cioè  $L \times L$ . Nel caso in cui il numero delle quantità integrali,  $L$ , sia maggiore di quello dei parametri considerati conviene usare un metodo alternativo equivalente, detto metodo per elementi, [8]. Questo metodo deve essere in ogni caso usato quando la matrice di dispersione  $\mathbf{C}_p$  sia indefinita e quindi il suo inverso presenti delle singolarità. Secondo questo metodo l'espressione corrispondente alla (A.19) è la seguente

$$\tilde{\mathbf{y}}_p = (\mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{C}_p^{-1})^{-1} (\mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{y}_p^{\text{ex}} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{y}_Q^{\text{ex}}) \quad (\text{A.22})$$

e nel caso in cui si possa assumere che  $\mathbf{y}_p^{\text{ex}} = \mathbf{0}$ ,

$$\tilde{\mathbf{y}}_p = (\mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{C}_p^{-1})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{y}_Q^{\text{ex}} \quad (\text{A.23})$$

La matrice di dispersione degli errori associati alle quantità  $\tilde{\mathbf{y}}_p$  risulta infine

$$\tilde{\mathbf{C}}_p^{-1} = \mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{S} . \quad (\text{A.24})$$

### A.3. Applicazione del metodo di riduzione statistica per l'identificazione del punto caldo

Secondo il metodo descritto nei paragrafi precedenti per l'identificazione di eventuali punti caldi mediante dispositivi di misura in-core (collettroni), i parametri da considerare per render conto delle discrepanze tra valori calcolati (nominali) e misurati si riducono ad una sorgente locale esterna di neutroni con spettro di fissione, di intensità eguale a zero in condizioni (critiche) di funzionamento nominale. In caso di una perturbazione del sistema che induce la formazione di punto caldo, secondo la procedura di riduzione statistica sopra considerata tale sorgente assume un valore finito simulando in tal modo effetti sul flusso neutronico equivalenti a quelli dovuti a una ipotetica perturbazione locale del tasso di fissione. Con questa assunzione la matrice di dispersione  $\mathbf{C}_p$  si riduce ad uno scalare,  $c_p$ , e risulta indefinita, e quindi rappresentata da un valore singolare. Di conseguenza sarà  $c_p^{-1} = 0$ . Con questa ipotesi le (A.23) e (A.24) diventano:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{p,1} \square \tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{y}_Q^{\text{ex}} . \quad (\text{A.25})$$

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	14	15

e

$$\tilde{c}_p^{-1} = \mathbf{S}^T \mathbf{C}_Q^{-1} \mathbf{S} . \quad (\text{A.26})$$

In questo caso, trattandosi di un solo parametro, la matrice di sensitività  $\mathbf{S}$  diventa un vettore.

Da notare che, data la singolarità della matrice  $\mathbf{C}_p$ , non sarebbe in questo caso utilizzabile il metodo di riduzione attraverso i moltiplicatori di Lagrange.


Nel caso in cui sia si ritenga inoltre che i valori integrali possano essere rappresentati da una matrice diagonale con elementi,  $c_Q$ , tutti eguali fra loro, le (A.25) e la (A.26) possono scriversi

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{y}_Q^{\text{ex}} . \quad (\text{A.27})$$

e

$$\tilde{c}_p = c_Q (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} . \quad (\text{A.28})$$

Si noti come una diminuzione del numero di quantità integrali utilizzabili (corrispondentemente nel nostro caso alla diminuzione di collettroni funzionanti a seguito del processo di degradazione) induca un numero di componenti della somma  $(\mathbf{S}^T \mathbf{S})$  sempre più piccolo, riducendone quindi il valore e, di conseguenza, induca valori delle componenti (incertezze) della matrice di dispersione stimata (in questo caso ridotta ad uno scalare) sempre più grandi.

 <b>Ricerca Sistema Elettrico</b>	<b>Sigla di identificazione</b>	<b>Rev.</b>	<b>Distrib.</b>	<b>Pag.</b>	<b>di</b>
	NNFISS – LP1 - 013	0	L	15	15

## Riferimenti

1. J.L. Mourlevat, "Instrumentation interne des réacteurs", <http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/energies-th4/genie-nucleairti180/instrumentation-interne-des-reacteurs-bn3452/> (2001).
2. J.Kroon, "Self-powered neutron flux detector", <http://www.freepatentsonline.com/4140910.html>, (1979).
3. A. Gandini, "Generalized Perturbation Theory (GPT) Methods. A Heuristic Approach", in *Advances in Nuclear Science and Technology*, Vol. 19, J. Lewins and M. Becker Eds., Plenum Publishing Corporation, New York, 1987.
4. Gandini, "Sensitivity Analysis of Subcritical Systems by the HGPT Methodology", *Annals of Nuclear Energy*, 24, 1241 (1997).
5. A. Gandini, "A Generalized Perturbation Method for Bi-linear Functionals of the Real and Adjoint Neutron Fluxes", *J. of Nuclear Energy*, 21, 755 (1967).
6. E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics, *Phys.Rev.*, 106, 620, 1957 and 108, 171, 1957.
7. A. Gandini, "Elements of Statistics and Event Analysis" in: *Safety Design Criteria for Industrial Plants*, M. Cumo and A. Naviglio Eds., CRC Press, Boca Raton, Florida, 1989.
8. A. Gandini, "Uncertainty Analysis and Experimental Data Transposition Methods Based on Perturbation Theory" in *Handbook of Uncertainty Analysis*, Y. Ronen Ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, 1988.